

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XLII.

*I. Calorimetrische Untersuchungen;
von C. Dieterici.**III. Die Dampfspannungen einiger wässeriger Salzlösungen
bei 0°.*

In einer früheren Mittheilung¹⁾ habe ich eine Methode mitgetheilt, nach welcher das specifische Volumen des bei 0° gesättigten Wasserdampfes bestimmt wurde. Dieselbe bestand darin, dass man aus einem kleinem Wasserreservoir Wasser in einen luftleer gemachten Ballon von bekannter Grösse und Temperatur hineinverdampfen liess. Die Menge Wassers, welche verdampfte, wurde nicht direct durch Wägung des Reservoirs ermittelt, sondern dadurch, dass die Wärme, welche beim Verdampfen des Wassers absorbirt wurde, der Messung unterlag, und aus der vorher ermittelten Verdampfungswärme die Gewichtsmenge des verdampften Wassers berechnet wurde. Unter Anwendung des Bunsen'schen Eiscalorimeters als Wärme messenden Apparat konnte constatirt werden, dass der über reinem Wasser bei 0° gesättigte Dampf bei einer Ueberhitzung dem Gesetze von Gay-Lussac folgt, und es konnte weiter der Einfluss erkannt und vermieden werden, welchen die Wandungen des Ballons im Sättigungspunkte durch die Condensation des Dampfes auf die Messung des specifischen Volumens des bei 0° gesättigten Wasserdampfes ausübten. Die Erkenntniss, dass das Gay-Lussac'sche Gesetz für den bei 0° über reinem Wasser gesättigten Dampf volle Gültigkeit besitzt, stützte die Annahme,

1) Dieterici, Wied. Ann. 38. p. 1. 1889.

dass auch das Mariotte'sche Gesetz anwendbar sei, und es konnte daher aus den ausgeführten Messungen der Druck berechnet werden, den der über reinem Wasser gesättigte Dampf bei 0° ausübt. Er ergab sich $p_0 = 4,62$ mm Hg.

Es lag nahe und war auch schon sogleich in's Auge gefasst, dieselbe Methode zur Untersuchung des Druckes anzuwenden, den der über einer wässerigen Salzlösung bei 0° gesättigte Dampf ausübt, um so zur Beantwortung einer Frage zu kommen, welche in mehr als einer Hinsicht wesentliches Interesse beansprucht, der Frage nach der Dampfspannungsverminderung durch gelöste Salze.

Hätte man dabei in genau derselben Weise, wie es in der citirten Arbeit für reines Wasser geschehen war, auch mit Salzlösungen verfahren wollen, also so, dass man das im Eiscalorimeter enthaltene Reservoir mit wässerigen Lösungen verschiedener Salze in verschiedenen Concentrationen beschickte, aus diesem Vorrath sich Dampf entwickeln liess in einen gut luftleer gemachten Ballon von bekannter Grösse und die beim Verdampfen verbrauchte Wärme durch das Calorimeter ermittelte, so hätte man, um die verdampfte Wassermenge zu berechnen, die Verdampfungswärmen aller in Anwendung kommenden Salzlösungen kennen müssen, hätte also, wenn anders man sich nicht auf anderweitige unsichere Daten stützen wollte, dieselbe Arbeit für alle jene Salzlösungen ausführen müssen, die ich für reines Wasser vorher ausgeführt hatte. Die Umständlichkeit dieses Weges entschied dafür, ihn nicht zu betreten. Dagegen eröffnete der im Folgenden beschriebene Weg Aussicht auf Erfolg.

2. Ein grosser Glasballon *B* (vgl. Figur 1), welcher von einem grossen Wasserbade constanter Temperatur umgeben ist, steht nach der einen Seite hin durch eine Röhrenleitung, in welche ein Hahn 1 eingefügt ist, mit einem kleinen Reservoir *R*, in Verbindung, welches in einem Bunsen'schen Eiscalorimeter steckt. Nach der anderen Seite vermittelt eine mit zwei Hähnen 2 und 4 versehene Glasröhrenleitung die Verbindung des Glasballons durch ein mit Phosphorsäure-Anhydrid gefülltes Trockengefäss *T* zu einer guten Töpler-Hagen'schen Quecksilberluftpumpe. Zwischen den Hähnen 2 und 4 ist rechtwinklig nach unten ein

Glasrohr angeblasen, welches unter Einschaltung eines Hahnes 3 die Verbindung zu einem zweiten grösseren aus einer weiten Glasröhre gefertigten Reservoir R , herstellt.

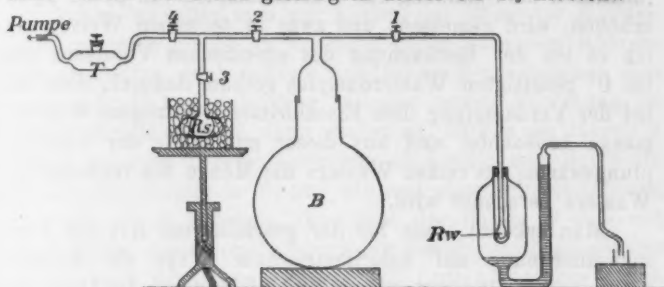


Fig. 1.

Vor Beginn des Versuches wird das ganze aus dem Ballon und den Röhrenleitungen bestehende System sorgfältig evacuirt. Die Reservoirs R_w und R , sind mit Flüssigkeiten beschickt, und zwar R , mit einer Salzlösung bekannter Concentration und R_w mit reinem Wasser; durch fortgesetztes Pumpen werden die Flüssigkeiten von der in ihnen absorbirten Luft befreit und, nachdem dies geschehen, die Hähne 1 und 3 geschlossen, die Hähne 2 und 4 geöffnet. Bei dieser Stellung der Hähne ist der Ballon B durch das Phosphorsäure-Gefäß mit der Pumpe verbunden; ein ruhiges Stehenlassen etwa eine Stunde lang genügt, um den Ballon auszutrocknen. Inzwischen wird das Reservoir R , von einem mit klein gestossenem Eis gefüllten Gefäß umgeben. Nachdem die in R , enthaltene Salzlösung die Temperatur 0° angenommen hat, wird Hahn 4 geschlossen, Hahn 3 geöffnet. Der Ballon B füllt sich nun mit Wasserdampf von der Spannung p , welche der Wasserdampf bei 0° über der Salzlösung hat; der Dampf ist im Ballon B überhitzt zur Temperatur des Wasserbades. Nach einiger Zeit, nach welcher der Ballon sich ganz mit Dampf erfüllt hat, wird der Hahn 2 geschlossen und Hahn 1 geöffnet. Nunmehr ist der Dampf im Ballon in Berührung mit dem in R_w enthaltenen reinen Wasser, welches im Calorimeter ebenfalls die Temperatur 0° hat; es wird also von diesem so viel verdampfen müssen, dass der Dampf im Ballon die Spannung p_w erhält, welche

der Dampf bei 0° über reinem Wasser besitzt. Die Menge reinen Wassers, welche nothwendig ist, um in Dampfform im Ballon die Spannung des Wasserdampfes von p_s auf p_w zu erhöhen, wird gemessen, und zwar in derselben Weise, wie ich es bei der Bestimmung des specifischen Volumens des bei 0° gesättigten Wasserdampfes gethan, dadurch, dass die bei der Verdampfung dem Eiscalorimeter entzogene Wärmemenge beobachtet und aus dieser mit Hülfe der Verdampfungswärme des reinen Wassers die Menge des verdampften Wassers berechnet wird.

Man erkennt, dass bei der geschilderten Art der Versuchsanordnung auf calorimetrischem Wege die Dampfspannungsverminderung direct und nicht durch die Differenz zweier Beobachtungen bestimmt wird. Dieses ist ein wesentlicher Vorzug; denn gerade die durch gelöste Salze hervorbrachte Verminderung der Dampfspannung ist von hervorragendem theoretischen Interesse. Weiter erkennt man, dass in die Berechnung nur die Zahl für die Verdampfungswärme des reinen Wassers eingeht, welche mit grosser Sicherheit ermittelt ist.

In Bezug auf die Genauigkeit der Methode verweise ich auf die früher dargelegten Gründe, welche bei Messung kleiner Dampfspannungen die calorimetrische Methode der kathetometrischen überlegen sein lassen. Die Sicherheit der Beobachtung macht es wünschenswerth, dass die aus dem Reservoir R_w verdampfende Wassermenge möglichst gross ist; diese Menge ist bestimmt durch die Dampfspannungsverminderung $\pi = p_w - p_s$ und durch das Volumen des Ballons; es musste also, wenn man auch auf schwach concentrirte Lösungen die Beobachtung ausdehnen wollte, der Ballon möglichst gross genommen werden. Ich hatte mir als Grenze der Genauigkeit die gesetzt, dass die Dampfspannungsverminderung π durch eine Beobachtung auf 0,005 mm Hg genau beobachtet werden sollte, und daraus ergab sich, dass man einen Ballon von mindestens 15 l Volumen wählen musste.

Der ganze Aufbau der Apparate erscheint etwas complicirt; indessen ist zu bedenken, dass, nachdem das ganze durch passend eingefügte Glasschliffe verbundene System

einmal zusammengesetzt und ausgepumpt war, die Beobachtungen schnell hintereinander ausgeführt werden konnten. Denn wollte man von einer Salzlösung zu einer anderen übergehen, so hatte man nur nöthig, das Reservoir R_1 , welches in einem Schliff an der nach unten gehenden Röhrenleitung anhing, nach Schluss des Hahnes 3 abzunehmen und nach gründlicher Reinigung mit der neuen Salzlösung zu füllen. Setzte man R_1 dann wieder an, öffnete die Hähne 3 und 4, während 2 geschlossen war, so konnte man durch die Pumpe das Reservoir R_1 und die neu eingefüllte Salzlösung von aller Luft befreien, ohne dass der Ballon B sich mit Luft füllte. Dies musste vermieden werden; denn gerade das Auspumpen der letzten Spuren von Luft aus einem Ballon von 15 l Volumen mit einer Quecksilberluftpumpe, deren Volumen nur wenig mehr als 0,5 l betrug, ist eine sehr zeitraubende Arbeit.

3. Eine Reihe von specielleren experimentellen Vorichtsmaassregeln erwies sich zum sicheren Gelingen der Versuche als nothwendig. Sie seien im Folgenden erwähnt:

In Bezug auf die Behandlung des Eiscalorimeters verweise ich auf meine früheren Arbeiten; auch hier wurde die von Schuller und Wartha eingeführte Beobachtungsmethode angewendet, durch das Gewicht der von der Saugspitze ausgestossenen bez. eingesogenen Quecksilbermenge die Veränderung des Eismantels zu bestimmen. Nach den Beobachtungen von Bunsen, Schuller und Wartha und Velten schmilzt beim Zuführen von 1 g Calorie so viel Eis im Calorimeter, dass 15,44 mg Hg von der Saugspitze eingesogen werden. Die spontane Veränderung des Eismantels hängt, wenn alle Wärmezufuhr abgeschnitten, wesentlich nur ab von dem Druck, unter welchem das Eis steht. Diesen kann man verändern dadurch, dass man die Saugspitze und zugleich damit das Niveau der aussen angesetzten Quecksilbernäpfe verändert. Es wurde nicht eher mit den Beobachtungen begonnen, als bis man dieses Niveau so verändert hatte, dass in einer Stunde ruhigen Stehenlassens höchstens ± 3 mg Hg von der Saugspitze ausgestossen bez. eingesogen wurde, im Durchschnitt jedoch betrug die stündliche Veränderung nicht mehr als 1,5 mg Hg. Der constante Gang

des Calorimeters wurde stets in der Zeit zwischen den einzelnen Versuchen (1—2 Stunden) beobachtet; der Wärmeausgleich im Calorimeter beim Verdampfen aus R_w dauerte 20 Minuten. Am Anfang und Ende dieser Zeit wurde also das Quecksilbergefäss an der Saugspitze gewechselt, und die beim Versuch eingetretene Gewichtsänderung durch Wägung bestimmt. Um den Wärmeausgleich im Calorimeter zu beschleunigen war das Reservoir R_w aus einem Platinrohre von 5 mm Durchmesser hergestellt, welches unten zu einer Erweiterung von etwa 4 ccm Volumen ausgebaucht war; das Platinrohr war direct an ein Glasrohr angeschmolzen, es war, soweit es im Calorimeter steckte, von Quecksilber umgeben.

Wichtig war es, dass sämmtliche Hähne weite — 3 mm — Durchbohrungen hatten; denn bei den geringen Drucken, welche namentlich concentrirte Salzlösungen bei 0° ausüben, verlangsamt die Reibung, welche ein Hahn mit enger Durchbohrung dem Dampfe entgegensetzt, den Verdampfungsprocess. Dasselbe gilt für den Fall, dass sich der Ballon schon mit dem Dampf der Salzlösung gefüllt hat und nun nach Schliessen des Hahnes 2 und Oeffnen des Hahnes 1 nur der geringe Ueberdruck $p_w - p_s$ in Wirksamkeit tritt, den der Dampf des reinen Wassers über den der Salzlösung hat. — Noch ein anderes Moment erwies sich für das Gelingen der Versuche als sehr wichtig und war für die Form und Grösse des Reservoirs R_s Ausschlag gebend. Zunächst war klar, dass soviel Salzlösung in R_s enthalten sein musste, dass bei mehrfacher Wiederholung ein und desselben Versuches durch die Verdampfung in den Ballon keine merkliche Konzentrationsänderung der Salzlösung eintreten durfte. Da bei jedem Versuche etwa $\frac{1}{12}$ bis $\frac{1}{20}$ g Wasser aus der Salzlösung entwich, so waren etwa 20 g Salzlösung in R_s jedenfalls genügend, um Konzentrationsänderungen auszuschliessen. Trotzdem jedoch die Menge der Salzlösung so gross gewählt wurde, zeigten sich dennoch anfänglich auffällige Unsicherheiten in den Beobachtungen. Der Grund derselben lag darin, dass, wenn R_s mit seinem Vorrath von Salzlösung beschickt und nun nach vorheriger Evacuation die Verbindung zum Ballon hergestellt wurde, der Dampf

vornehmlich nur der Oberfläche der Lösung entzogen, die oberflächliche Schicht daher concentrirter wurde; die zwischen der obersten und den tieferen Schichten entstandenen Concentrationsunterschiede gleichen sich nur sehr langsam und unregelmässig durch die Diffusion aus und daher entstanden jene Unregelmässigkeiten in den Beobachtungen. Ich vermied diese Störungen dadurch, dass ich dem Reservoir *R*, die aus der Figur ersichtliche längliche Gestalt gab und während der Zeit, während welcher zwischen *R*, und dem Ballon die Hähne geöffnet waren, *R*, mehrfach in dem Schlift, durch den es mit der Röhrenleitung verbunden war, hin und her drehte. Es floss dann die Lösung in dem länglichen Gefäss hin und her; die entstandenen Concentrationsunterschiede glichen sich aus.

Endlich seien noch einige Bemerkungen über den Glasballon *B* gemacht. Bei den Beobachtungen über das specifische Volumen des bei 0° gesättigten Wasserdampfes hatte sich die Condensation des Dampfes auf den Glaswandungen als ausserordentlich störend erwiesen, und ich versuchte daher, ob und in welchem Maasse sich dieselbe vermeiden lasse. Von den verschiedenen Glassorten, welche alle nach Warburgs Erfahrungen vor dem Gebrauch mit siedendem Wasser behandelt wurden, erwies sich thüringer Glas am schlechtesten; bei weitem besser, aber auch noch ziemlich stark condensirend, zeigten sich schweres schlesisches Kaliglas und ebenso auch das in Deutschland hergestellte Bleiglas. Am wenigsten condensirte das ganz gewöhnliche grüne Flaschenglas, und aus diesem wurde auch der bei den Versuchen benutzte Ballon gewählt. Weitere Versuche, die Glasarten für diesen Zweck brauchbarer zu machen dadurch, dass man sie nach Weber den Dämpfen der conc. Salzsäure aussetzte, schlugen fehl, ebenso Versuche, bei denen ich die Wandungen mit einer dünnen Paraffinhaut überzog. Es erschien mir nicht aussichtslos, zu versuchen, ob nicht ein Ueberziehen der Wandungen mit einer Substanz, an der das flüssige Wasser nicht adhärirt, die Condensation des Dampfes vermeiden sollte; indessen ergaben die Versuche ein negatives Resultat.

Der Einfluss der Condensation an den Wandungen kommt

zudem bei den in dieser Arbeit mitgetheilten Versuchen nicht in Betracht; denn die Wasserhaut stellt sich schon her, während der Ballon sich mit dem Dampf der Salzlösung füllt; wird nachher durch Oeffnen des Hahnes 1 noch die Spannung von p_s auf p_w erhöht, so findet der neu eintretende Dampf die Wandungen schon beladen mit der Wasserhaut vor; da letztere innerhalb so kleiner Druckänderungen unabhängig von dem Drucke ist, so wird sich also nichts von dem neu eintretenden Dampf condensiren können und daher die Beobachtung der Dampfspannungsverminderung unabhängig von dem störenden Einfluss der Condensation sein.

Völlig vermieden wird die Condensation nach meinen früheren Versuchen, wenn man den Ballon über die Sättigungstemperatur erhitzt, und da dies zugleich den Vortheil mit sich führte, dass man nicht so ungeheure Quantitäten von Eis verbrauchte, wie sie nothwendig gewesen wären, um den grossen Ballon Wochen hindurch auf der Temperatur 0° zu erhalten, so umgab ich denselben mit einem Wasserbade von etwa $+10^\circ$. Dies bringt keine Unsicherheit der Berechnung mit sich, denn durch den Nachweis der Gültigkeit des Gay-Lussac'schen Gesetzes für Wasserdampf, der über reinem Wasser bei 0° gesättigt ist, ist auch die Gültigkeit desselben für Dampf geringerer Spannung gewährleistet.

4. Bei Beobachtung der angeführten Vorsichtsmaassregeln gingen nun die Versuche ohne Störungen vor sich.

Die Berechnung derselben ist einfach und ergibt sich aus folgender Ueberlegung:

Die Menge m_s Wassers, welche aus der Salzlösung im Reservoir R , verdampft, um das Volumen V des Ballons B zu erfüllen, ist:

$$m_s = V \cdot \rho_{s\vartheta},$$

wobei $\rho_{s\vartheta}$ die Dichte des Wasserdampfes von der Spannung p_s des Wasserdampfes über der Salzlösung bei $\vartheta_0 = 273 = 0^\circ \text{ C.}$ und überhitzt zu der Temperatur ϑ des Wasserbades bedeutet. Bezeichnet man mit $v_{s\vartheta}$ das Volumen von 1 g Wasserdampf unter denselben Bedingungen, so ist also:

$$m_s = V \cdot \frac{1}{v_{s\vartheta}}.$$

Die Menge m_w Wassers, welche den Ballon unter denselben Umständen erfüllen würde, wenn an Stelle der Salzlösung reines Wasser gesetzt wird, ist in analoger Bezeichnung:

$$m_w = V \cdot \frac{1}{v_{w\vartheta}}.$$

Also ist die beim Versuch gemessene Wassermenge:

$$m_w - m_s = V \cdot \left[\frac{1}{v_{w\vartheta}} - \frac{1}{v_{s\vartheta}} \right].$$

Da nun bei constanter Temperatur ϑ :

$$v_{w\vartheta} \cdot p_w = v_{s\vartheta} \cdot p_s, \quad \text{also} \quad v_{s\vartheta} = v_{w\vartheta} \cdot \frac{p_w}{p_s}$$

ist, so folgt:

$$m_w - m_s = V \cdot \frac{1}{v_{w\vartheta}} \left[\frac{p_w - p_s}{p_w} \right] = V \cdot \frac{1}{v_{w\vartheta}} \cdot \frac{\pi}{p_w}.$$

Oder:

$$m_w - m_s = V \cdot \rho_{w\vartheta} \cdot \frac{\pi}{p_w}.$$

Von den in dieser Gleichung vorkommenden Grössen wird $m_w - m_s$, d. i. die aus dem Reservoir R_w verdampfende Wassermenge durch das Calorimeter gemessen.

V das Volumen des Ballons gerechnet vom Hahn 1 bis Hahn 2 ist ein für alle Male durch Auswägen mit Wasser ermittelt.

$\rho_{w\vartheta}$ die Dichte des Wasserdampfes von der Spannung p_w des bei 0° über reinem Wasser gesättigten Dampfes überhitzt zur Temperatur ϑ des Wasserbades ist ebenso wie p_w selbst in meiner vorigen Arbeit ermittelt.

Somit sind alle Grössen bis auf π bekannt, dieses also berechenbar.

In Worten kann man die Gleichung einfach so aussprechen, dass das Verhältniss der Wassermenge, welche aus R_w noch hinzu verdampft, nachdem der Ballon schon mit Dampf von der Spannung p_s erfüllt war, zu der Wassermenge, welche aus R_w verdampfen würde, wenn der Ballon vorher ganz evacuirt war, direct das Verhältniss der Dampfspannungsverminderung zur gesammten Dampfspannung ergibt. Da nun die aus der Saugspitze des Calorimeters austretenden Quecksilbermengen direct den Wassermengen pro-

portional sind, so ergibt sich als einfachste und kürzeste Berechnung des Verhältnisses π/p_0 die, dass man die beim Versuch beobachtete Quecksilbermenge dividirt durch diejenige Quecksilbermenge, welche aus der Saugspitze des Calorimeters austreten würde, wenn der Ballon sich ganz mit Dampf aus R_0 füllt. Diese Quecksilbermenge ist direct aus meinen früheren Versuchen berechenbar.

5. Die Beobachtungen wurden zunächst nur auf wasserfrei krystallisirende Salze ausgedehnt. Mit den gut getrockneten Salzen wurden Normal-, Doppelt-, Drei- und Vierfach-Normallösungen hergestellt, indem die Anzahl von Grammen, welche durch das Moleculargewicht des Salzes angegeben wurde, bez. deren Multipla in 1 l Wasser gelöst wurden. Diese Lösungen wurden in hinreichender Quantität ca. 20 ccm in R_0 eingeführt. Untersucht wurden die Lösungen von NaCl, KCl, NaNO_3 , KBr, KJ und LiCl in verschiedenen Concentrationen. Für jede Concentration wurden mindestens vier Beobachtungen ausgeführt, für die weitere Berechnung die Mittelwerthe der Beobachtungen benutzt.

Im Folgenden gebe ich für NaCl Tab. I die einzelnen Beobachtungen an, um ein Bild von der Sicherheit der Messungen zu geben.

Tabelle I.

Es bedeutet t Temperatur des Wasserbades um den Ballon B in Celsiusgraden.

m die Gewichtsmenge Hg in mg, welche beim Versuch aus der Saugspitze des Calorimeters austrat.

Corr. die Correction, welche wegen der spontanen Veränderung des Eismantels im Calorimeter der Beobachtung von m hinzugefügt werden muss.

m_c das corrigirte m .

m_{10} die Gewichtsmenge Hg, welche aus der Saugspitze ausgetreten wäre, wenn der Ballon B genau die Temperatur $+ 10^\circ \text{C.}$ gehabt hätte.

NaCl. Moleculargewicht 58,5.

1. n = Normal-Lösung. 5,85 g NaCl + 100 g aq.

t	m	Corr.	m_c	m_{10}
10,5°	25,3 mg	-1,5 mg	23,8 mg	23,8 mg
10,8	25,7 "	-1,3 "	24,3 "	24,4 "
9,8	23,3 "	0 "	23,3 "	23,3 "
8,4	22,0 "	+1,1 "	23,1 "	22,9 "
10,7	21,4 "	+0,8 "	22,2 "	22,3 "
10,2	23,3 "	+0,8 "	24,1 "	24,1 "
9,7	23,9 "	+0,8 "	24,7 "	24,7 "
Mittel: 23,64 mg				

2. $2n$ = zweifach Normal-Lösung. 11,70 g NaCl + 100 g aq.

10,5°	47,6 mg	-0,4 mg	47,2 mg	47,3 mg
9,8	47,6 "	-0,8 "	46,8 "	46,8 "
10,7	47,6 "	-0,8 "	46,8 "	46,9 "
10,4	48,3 "	-0,8 "	47,5 "	47,6 "
Mittel: 47,15 mg				

3. $3n$ = dreifach Normal-Lösung. 17,55 g NaCl + 100 g aq.

8,5°	73,4 mg	-0,8 mg	72,6 mg	72,2 mg
8,1	74,5 "	-0,8 "	73,7 "	73,2 "
9,9	73,4 "	-0,5 "	72,9 "	72,9 "
9,7	74,2 "	-0,5 "	73,7 "	73,6 "
Mittel: 73,0 mg				

4. $4n$ = vierfach Normal-Lösung. 23,40 g NaCl + 100 g aq.

10,5°	100,7 mg	+0,5 mg	101,2 mg	101,3 mg
6,0	104,5 "	-0,3 "	104,2 "	103,0 "
10,2	101,0 "	-0,3 "	100,7 "	100,8 "
9,8	102,7 "	-0,3 "	102,4 "	102,3 "
Mittel: 101,85 mg				

5. $5n$ = fünffach Normal-Lösung. 29,25 g NaCl + 100 g aq.

6,7°	131,9 mg	0,0 mg	131,9 mg	130,3 mg
8,4	132,9 "	0,0 "	132,9 "	132,1 "
9,7	131,3 "	0,0 "	131,3 "	131,1 "
11,1	133,6 "	+0,4 "	134,0 "	134,5 "
10,4	135,5 "	0,0 "	135,5 "	135,7 "
Mittel: 132,5 mg				

6. $6n$ = sechsfach Normal-Lösung. 35,50 g NaCl + 100 g aq.

10,4°	168,4 mg	-2,5 mg	165,9 mg	166,1 mg
9,8	166,7 "	-2,5 "	164,2 "	164,1 "
8,3	166,0 "	-0,8 "	165,2 "	164,2 "
9,0	165,7 "	-0,8 "	164,9 "	164,5 "
Mittel: 164,7 mg				

Ein Blick auf die in der vorstehenden Tabelle enthaltenen Beobachtungen, welche übrigens als die zuerst aus-

geführten noch verhältnissmässig unsicherer als die späteren waren, zeigt dass im Allgemeinen die Beobachtungen am Calorimeter in einem Intervall von etwa 2 mg Hg schwanken, also eine Beobachtung als sicher auf 1 mg Hg angesehen werden kann.

Das Volumen des Ballons B bei 10° war 15701,8 ccm. Es würde also nach meinen früheren Beobachtungen in den vollständig evacuirten und zu $+10^{\circ}$ überhitzten Ballon soviel Wasser hineinverdampfen, dass 682 mg Hg aus der Saugspitze austräten. Diese würden einen Druck im Ballon von $p_w = 4,62$ mm Hg hervorbringen; also bringt eine Unsicherheit der Beobachtung von 1 mg Hg am Calorimeter eine Unsicherheit der Dampfspannungsbeobachtung von $4,62/682$ mm Hg $= 0,0068$ mm Hg hervor. Das Mittel aus vier Beobachtungen wird also gewiss als auf 0,003 mm Hg sicher angesehen werden können. Eine derartige Sicherheit ist durch kathetometrische Beobachtungen überhaupt nicht erreichbar; im Uebrigen hindert Nichts durch Wahl eines noch grösseren Ballons die Sicherheit der Beobachtungen noch beliebig zu vergrössern.

In der folgenden Tabelle sind die Mittelwerthe der am Kochsalz und den anderen Salzen gemachten Beobachtungen und die sich daran anschliessende Berechnung der Dampfspannungsverminderungen enthalten.

Tabelle II.

Es bedeutet $n, 2n, 3n$ etc. Normal-, Doppelt-, Dreifach etc. Normallösung.

S die Gewichtsmenge trockenen Salzes, welche zu 100 g aq zugesetzt, die Lösung ergibt.

m_{10} der Mittelwerth der bei den Versuchen beobachteten, aus der Saugspitze ausgetretenen Quecksilbermengen in mg.

Δ die Differenzen der einander folgenden m_{10} .

$\pi = p_w - p_s$ die Dampfspannungsverminderung.

$\pi = m_{10}/682 \cdot p_w$ (siehe vorher).

p_s die Spannung des bei 0° über der Lösung gesättigten Wasserdampfes.

V_{10} Volumen des Ballons B bei $10^{\circ} = 15701,8$ ccm.

NaCl Moleculargewicht 58,5.

Concentration <i>n</i>	<i>S</i>	<i>m</i> ₁₀	<i>A</i>	π in mm Hg	<i>P</i> _a in mm Hg
0 <i>n</i>	0	0		0	4,620
1 <i>n</i>	5,85 g	23,64 mg	23,64	0,1601 mm	4,460
2 <i>n</i>	11,70 "	47,15 "	23,51	0,3194 "	4,301
3 <i>n</i>	17,55 "	73,0 "	23,85	0,4945 "	4,125
4 <i>n</i>	23,40 "	101,85 "	28,85	0,6900 "	3,930
5 <i>n</i>	29,25 "	132,50 "	30,65	0,8976 "	3,722
6 <i>n</i>	35,50 "	164,70 "	32,20	1,1157 "	3,504

KCl Moleculargew. 74,5.

0 <i>n</i>	0	0		0	4,620
1 <i>n</i>	7,45 g	21,86 mg	21,86	0,1481 mm	4,472
2 <i>n</i>	14,90 "	43,42 "	21,56	0,2941 "	4,326
3 <i>n</i>	22,35 "	63,50 "	20,1	0,4301 "	4,190
3,83 <i>n</i>	28,5 "	79,20 "	15,7	0,5365 "	4,083

NaNO₃ Moleculargew. 84,9.

0 <i>n</i>	0	0		0	4,620
1 <i>n</i>	8,49 g	20,2 mg	20,2	0,1369 mm	4,483
2 <i>n</i>	16,98 "	38,0 "	17,8	0,2574 "	4,363
4 <i>n</i>	33,96 "	70,0 "	32	0,4742 "	4,146
6 <i>n</i>	56,94 "	98,4 "	28,4	0,6666 "	3,953
8 <i>n</i>	67,92 "	128,53 "	30,13	0,8707 "	3,749

KBr Moleculargew. 119.

0 <i>n</i>	0	0		0	4,620
1 <i>n</i>	11,9 g	21,3 mg	21,3	0,1443 mm	4,476
2 <i>n</i>	23,8 "	43,65 "	22,35	0,2957 "	4,324
3 <i>n</i>	35,7 "	64,0 "	20,35	0,4336 "	4,186
4 <i>n</i>	47,6 "	86,1 "	22,10	0,5833 "	4,037

KJ Moleculargew. 166.

0 <i>n</i>	0	0		0	4,620
2 <i>n</i>	33,2 g	44,8 mg	44,8	0,3035 mm	4,316
4 <i>n</i>	66,4 "	89,8 "	45,0	0,6083 "	4,012
6 <i>n</i>	99,6 "	135,25 "	45,5	0,9162 "	3,704
7,5 <i>n</i>	124,5 "	169,2 "	34,0	1,1462 "	3,474

LiCl Moleculargew. 42,5.

0 <i>n</i>	0	0		0	4,620
2 <i>n</i>	8,5 g	50,20 mg	50,2	0,340 mm	4,280
4 <i>n</i>	17,00 "	115,70 "	66,10	0,7838 "	3,836
7,9 <i>n</i>	33,59 "	279,25 "	163,55	1,892 "	2,728
10 <i>n</i>	42,5 "	367,90 "	88,65	2,492 "	2,128

Uebersieht man die in der vorstehenden Tabelle enthaltenen Resultate, so ergibt sich zunächst als allgemeines Resultat, dass bei den Salzen KCl, KBr und KJ die Dampfspannungsverminderung so nahezu dem Salzgehalt proportional ist, dass man die Abweichungen als durch Beobach-

tungsfehler bedingt ansehen kann. Für diese Salze gilt also bei 0° das Wüllner'sche Gesetz, dass die Dampfspannungsverminderung proportional dem Salzgehalt ist.

Dieses Gesetz gilt aber nicht mehr für NaNO_3 , denn dort zeigt sich deutlich, dass die Dampfspannungsverminderung mit zunehmendem Salzgehalt abnimmt, während sie bei NaCl und in noch viel stärkerem Maasse bei LiCl mit zunehmendem Salzgehalt zunimmt.

Die in der Fig. 2 gezeichneten Curven geben als Ordinaten die Dampfspannung p , gemessen in mm Hg in ihrer

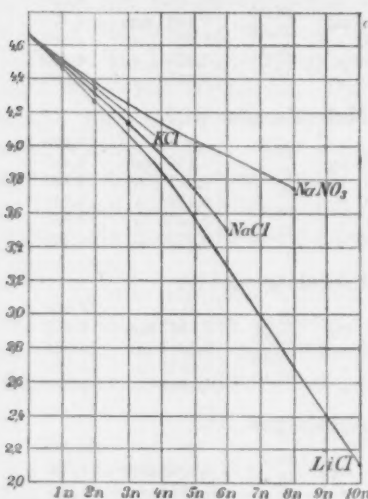


Fig. 2.

Concentration für verschiedene Salze verschieden ist, mich sehr in Erstaunen setzte, denn ich hatte erwartet, dass sich alle Salze so verhielten, wie NaNO_3 , dass also die Dampfspannungsverminderung mit zunehmender Concentration abnehme.

Zu dieser Vermuthung hatten mich verschiedene Ueberlegungen veranlasst; unter anderen auch die, dass nach der Theorie von van 'tHoff die Dampfspannungsverminderung nur abhängt von der Zahl der gelösten Molecüle; nehmen wir weiter mit Arrhenius an, dass in verdünnteren

Abhängigkeit von der Concentration, welche als Abscisse aufgetragen ist. Es sind nur die Curven für NaCl , LiCl , KCl und NaNO_3 gezeichnet; diejenigen von KBr und KJ fallen so nahe mit denjenigen von KCl zusammen, dass ihre Wiedergabe die Uebersichtlichkeit stören würde.

Ich muss gestehen, dass das Ergebniss meiner Versuche, dass die Abhängigkeit der Dampfspannungsverminderung von der

Lösungen mehr Molecüle dissociert sind, als in concentrirteren, so folgt, dass in verdünnteren Lösungen relativ mehr Ionen auf die Herabsetzung der Dampfspannung wirken, als in concentrirteren, und daraus folgt, dass die Dampfspannungsverminderung mit zunehmender Concentration abnehmen müsse.

Die Thatsache jedoch, dass die Abhängigkeit der Dampfspannungsverminderung für verschiedene Salze verschieden ist, erscheint zweifellos; auch ist dieselbe von früheren Beobachtern, so von Tammann¹⁾ und R. Emden²⁾ für dieselben Salze, aber für andere Temperaturen ebenfalls beobachtet.

Ein genauer Vergleich der neuen Daten mit denen der genannten Beobachter lässt diese Thatsache klar hervortreten; dieser Vergleich ist aber noch in anderer Beziehung wichtig, denn er gestattet ein Urtheil zu gewinnen über die Gültigkeit des zuerst von von Babo ausgesprochenen Gesetzes, dass das Verhältniss der Dampfspannung p_w des reinen Wasser zu derjenigen einer Salzlösung p_s bei derselben Temperatur constant, d. h. von der Temperatur unabhängig sei.

Zu diesem Vergleiche benutze ich die Beobachtungen Tammann's. Ich beschränke mich auf einen Vergleich mit diesen, weil einmal das Beobachtungsmaterial Tammann's sehr reichhaltig ist und zweitens die Beobachtungen sicher bei constanter Temperatur 100° C. ausgeführt sind. Die Beobachtungen Emden's ergeben übrigens, soweit ein Vergleich mit meinen Beobachtungen möglich ist, dasselbe Resultat.

In der folgenden Tab. III stelle ich nebeneinander Tammann's bei 100° und meine bei 0° geltenden Dampfspannungen der Salzlösungen p_s und der sich daraus ergebenden Werthe des Verhältnisses $p_w:p_s$.

1) G. Tammann, Mém. de l'acad. des sciences St. Peterburg. (7) 35. No. 9. 1887.

2) R. Emden, Wied. Ann. 31. p. 1. 1887.

Tabelle III.

Concentration	Tammann $t = 100^{\circ}$ $p_w = 760$ mm Hg		Dieterici $t = 0^{\circ}$ $p_w = 4,62$ mm Hg.	
	p_s	$p_w : p_s$	p_s	$p_w : p_s$
NaCl	"	734,8 mm	1,033	4,460 mm Hg 1,086
	2 n	707,9 "	1,073	4,301 " 1,074
	3 n	680,0 "	1,118	4,125 " 1,120
	4 n	649,0 "	1,171	3,980 " 1,176
	5 n	617,0 "	1,232	3,722 " 1,241
	6 n	583,5 "	1,302	3,504 " 1,315
KCl	"	735,6 mm	1,033	4,472 " 1,083
	2 n	711,2 "	1,069	4,326 " 1,068
	3 n	685,9 "	1,108	4,190 " 1,103
	3,88 n	663,7 "	1,145	4,083 " 1,131
NaNO ₃	"	737,5 mm	1,0305	4,483 " 1,0305
	2 n	713,8 "	1,065	4,363 " 1,059
	4 n	669,7 "	1,135	4,146 " 1,114
	6 n	628,3 "	1,209	3,953 " 1,169
	8 n	592,2 "	1,283	3,749 " 1,232
KBr	"	735,8 mm	1,033	4,476 " 1,082
	2 n	709,2 "	1,072	4,324 " 1,069
	3 n	683,5 "	1,112	4,186 " 1,104
	4 n	654,5 "	1,161	4,037 " 1,144
KJ	2 n	707,8 mm	1,074	4,316 " 1,071
	4 n	647,8 "	1,173	4,012 " 1,151
	6 n	588,2 "	1,292	3,704 " 1,247
	7,5 n	548,0 "	1,387	3,474 " 1,330
LiCl	2 n	702,9 mm	1,081	4,280 " 1,080
	4 n	627,5 "	1,211	3,836 " 1,204
	7,9 n	453,5 "	1,676	2,728 " 1,694
	10 n	366,5 "	2,074	2,128 " 2,171

Der Vergleich der Zahlen, welche das Verhältniss $p_w : p_s$ darstellen, ergibt den entschiedenen Beweis für das thatsächliche Bestehen des v. Babo'schen Gesetzes. Einige der Zahlen weichen ja voneinander ab, so namentlich die Zahlen für die stark concentrirten Lösungen von NaNO₃, KJ und die letzte von LiCl; möglich dass hier oder dort Beobachtungsfehler vorliegen. Sehen wir aber von diesen wenigen abweichenden Zahlen ab, so tritt mit unerwarteter Schärfe das Resultat hervor, dass der Quotient p_w/p_s aus den bei 100° von Tammann gemachten Beobachtungen sich als derselbe berechnet, wie der aus meinen Beobachtungen für 0° sich ergebende. Die ausserordentlich gute Uebereinstimmung zwischen beiden Zahlenreihen ist um so auffallender, als die Beobachtungen nach ganz verschiedenen Metho-

den ausgeführt sind; denn Tammann hat einfach direct die Depression beobachtet, welche die Salzlösungen im Barometer hervorbrachten, während meine Beobachtungen und Berechnungen auf calorimetrischem Wege gewonnen sind und sich stützen auf die Resultate meiner früheren calorimetrischen Untersuchungen. Wenn auf zwei so verschiedenen Wegen und für zwei so weit auseinanderliegende Temperaturen sich die Constanz des Verhältnisses $p_w:p_s$ ergibt, so können wir den experimentellen Beweis für die allgemeine Gültigkeit des von Babo'schen Gesetzes als erbracht erachten.

R. Emden hat aus seinen bei mittleren Temperaturen nach kathetometrischer Methode ausgeführten Beobachtungen ebenfalls schon dasselbe Gesetz als gültig nachzuweisen gesucht. Konnte man gegen diesen Beweis noch Einwendungen erheben, dass ein Fehler der Methode — etwa Spuren von Luft im Vacuum des Barometers — vorlag, oder dass man der Constanz der Temperatur bei den Beobachtungen nicht sicher genug sein konnte, oder endlich, dass das Temperaturintervall, in dem die Beobachtungen ausgeführt sind, nicht weit genug war, so kann man jetzt diese Einwendungen nicht mehr erheben, sondern muss den Satz als gültig — jedenfalls im Temperaturintervall von 0—100° und für die weniger concentrirten Lösungen der untersuchten Salze — ansehen, dass das Verhältniss der Dampfspannungen zweier verschieden concentrirter Salzlösungen eine von der Temperatur unabhängige Grösse sei.

6. Dieses Ergebniss ist für die Theorie von grosser Wichtigkeit. Es ist bekannt, dass sowohl Kirchhoff aus der Theorie der „Wirkungsfuction“ wie auch von Helmholtz aus der Theorie der „freien Energie“ für die Lösungswärme l eines Salzes in einem Lösungsmittel bez. für die Verdünnungswärme eine Gleichung gefolgert haben, welche die mechanisch gemessene Lösungswärme $J.l$ aus der absoluten Temperatur ϑ und den Dampfspannungen des Lösungsmittels — p_w für Wasser — und der entstandenen Salzlösung p_s zu berechnen gestattet. Dieselbe lautet:

$$J.l = R. \vartheta^2 \frac{d}{d\vartheta} \ln \frac{p_w}{p_s},$$

worin R die Gasconstante also in unserem Falle für Wasserdampf bedeutet.

Die Gültigkeit dieser Gleichung beruht auf der Anwendung des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes. Dieses ist für Wasserdampf bei 0° nachgewiesen, also ist die Gleichung für 0° anwendbar.

Oben ergab sich aber, dass ebenfalls für Wasserdampf $p_v : p_s$ von der Temperatur ϑ unabhängig ist, und daher ergibt die obige Gleichung bei 0° :

$$Jl = 0.$$

Wir wissen aber, dass die Lösungswärmen der Salze bei 0° nicht Null sind, und um sichere Daten zu gewinnen, habe ich ausserdem durch Herrn R. Scholz die Lösungswärmen bei 0° derselben Salze, welche ich auf ihre Dampfspannung untersuchte, sorgfältig in ihrer Abhängigkeit von der Concentration untersuchen lassen; das Ergebniss der Untersuchung war, wie erwartet wurde, dass die Lösungsbez. Verdünnungswärmen dieser Salze sehr erhebliche sind und mit abnehmender Concentration im allgemeinen zunehmen. Die genauen Zahlen wird Herr Scholz selbst mittheilen.

Der Widerspruch, der hier zwischen Theorie und Erfahrung hervortritt, ist schon mehrfach bemerkt. L. Arons¹⁾ suchte ihn dadurch zu beseitigen, dass er an Stelle des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes für den Wasserdampf die Zustandsgleichung von Clausius einführte; das Ergebniss war ein negatives, der Widerspruch liess sich nicht durch diese Annahme beseitigen. Diesen Weg zu betreten sind wir aber jetzt auch nicht mehr berechtigt, nachdem die Gültigkeit des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes für den bei 0° gesättigten Wasserdampf erwiesen ist. Weiter hat Duhem²⁾ die Kirchhoff-Helmholtz'sche Gleichung für die Lösungswärme dadurch zu erweitern gesucht, dass er noch die Aenderung der Löslichkeit mit der Temperatur in die Formel einführte. Auch dieser Versuch hebt den bestehenden Widerspruch nicht auf; denn erstens

1) L. Arons, Wied. Ann. 25. p. 408. 1885.

2) Duhem, Ann. éc. norm. sup. Paris. (3) 4. p. 381. 1887.

ergibt sich aus den Gleichungen Duhem's, dass die Verdünnungswärmen für Salze, welche dem Babo'schen Gesetze folgen, gleich Null sein müssen: dies widerspricht der Erfahrung. Zweitens müssten die Lösungswärmen für solche Salze, welche eine der Concentration proportionale Dampfspannungsverminderung zeigen, also wie KCl, KBr und KJ nach unseren Beobachtungen, unabhängig von der Concentration sein; auch diese Folgerung widerspricht der Erfahrung.

Man könnte weiter annehmen, dass die mit dem Lösen des Salzes verbundenen Contractionen die Differenz herbeiführen. Berechnet man jedoch mit Hülfe der bekannten Contractionscoefficienten und der Compressibilitätscoefficienten der Salzlösungen, wie sie von Röntgen und Schneider beobachtet sind, die Compressionsarbeiten und versucht, ob vielleicht die Lösungswärmen allein als ein Aequivalent jener Compressionsarbeiten aufgefasst werden können, so erkennt man bald, dass die letzteren viel zu klein sind, als dass sie die grossen Werthe der Lösungswärmen ausmachen könnten. Abgesehen von einer Uebereinstimmung in den Zahlenwerthen ist nicht einmal eine solche in der Grössenordnung vorhanden.

Wir müssen uns also der Theorie selbst zuwenden, und ich will im Folgenden anzugeben suchen, wodurch die Differenz veranlasst ist.

Die Gleichung für die Lösungswärme:

$$(1) \quad J.l = R. \vartheta^2. \frac{d}{d\vartheta} \ln \frac{p_w}{p_s}$$

kann, indem man die Differentiation ausführt, geschrieben werden in der Form:

$$(1a) \quad Jl = R. \vartheta^2. \frac{1}{p_w} \cdot \frac{dp_w}{d\vartheta} - R \vartheta^2 \frac{1}{p_s} \cdot \frac{dp_s}{d\vartheta}.$$

Vergleichen wir hiermit die bekannte Gleichung für die mechanisch gemessene Verdampfungswärme $J\varrho_w$ des Wassers:

$$(2) \quad J\varrho_w = v. \vartheta. \frac{dp_w}{d\vartheta},$$

welche wir unter Anwendung des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes schreiben können in der Form:

$$(2_a) \quad J \cdot \varrho_w = R \cdot \vartheta^2 \cdot \frac{1}{p_w} \cdot \frac{dp_w}{d\vartheta},$$

so erkennen wir, dass die obige Formel (1_a) die Lösungswärme l des Salzes darstellt, als die Differenz der Verdampfungswärme ϱ_w des Wassers und derjenigen ϱ_s der Salzlösung, indem analog:

$$(2_b) \quad J \cdot \varrho_s = R \cdot \vartheta^2 \cdot \frac{1}{p_s} \cdot \frac{dp_s}{d\vartheta}$$

gesetzt ist. Es sagt also die Gleichung (1_a) dasselbe, wie die Gleichung:

$$(3) \quad l = \varrho_w - \varrho_s,$$

wobei Lösungs- und Verdampfungswärmen alle bei derselben Temperatur 0° genommen sind.

Diese Gleichung scheint richtig zu sein, denn verstehen wir unter ϱ_s die Verdampfungswärme einer concentrirten Salzlösung, so sagt sie aus, dass die Wärme, welche beim Lösen hat zugeführt werden müssen, um die Temperatur constant zu halten, beim Verdampfen und dem damit verbundenen Auskrystallisiren des Salzes wiedergewonnen wird. Indessen stellt die Formel (2_b) nicht den gesammten calorimetrischen Effect dar, der beim Verdampfen einer Salzlösung auftritt; denn dieser besteht erstens aus derjenigen Wärme, welche nöthig ist, um das Wasser der Salzlösung in Dampf von der Spannung p_s und der Temperatur $\vartheta = 0^\circ$ überzuführen, und zweitens aus derjenigen Wärme, die der Arbeit äquivalent ist, welche aufgewendet werden muss, um die gelösten Salzmoecüle zu festem Salz zu vereinigen, eine Arbeit, welche wir als negative Disgregationsarbeit bezeichnen können, oder auch nach van 't Hoff Arbeit gegen den osmotischen Druck. Nur die erst genannte Wärmemenge gibt die Gleichung (2_b), während sie die zweite nicht enthält; sie gibt also die Verdampfungswärme des Wassers, wenn das Salz ungelöst neben dem Wasser im Dampfraum vorhanden ist, und ist nur anwendbar auf Flüssigkeiten, welche beim Verdampfen in ihren eigenen Dampf übergehen und aus diesem allein durch Condensation wieder gewonnen werden können.

Ich halte es nicht für überflüssig, noch durch einen anderen Gedankengang die Unrichtigkeit der Formel (3) zu

erweisen: Durch die Gleichung (3) ist folgender isotherme Kreisprocess als reversibel ausgesprochen:

Es sei gegeben 1 g Wasser und getrennt davon so viel Salz, als zu einer concentrirten Lösung nöthig ist, also p g Salz, beide bei 0° .

1. Operation: Das Salz werde bei 0° gelöst; zur Constanterhaltung der Temperatur muss die Wärme l zugeführt werden.

2. Operation: Das Wasser der Salzlösung werde bei constanter Temperatur in Dampf von der Spannung p_s übergeführt, wozu gemäss den bisherigen Bezeichnungen die Wärme q_s zugeführt werden muss.

3. Operation: Der Dampf von der Spannung p_s werde vom Salz getrennt und auf p_w isotherm comprimirt. Da der Dampf sich wie ein vollkommenes Gas verhält, wird die bei der Compression geleistete Arbeit in Wärme umgesetzt und diese bei Constanterhaltung der Temperatur wieder gewonnen.

4. Operation: Der Dampf werde isotherm comprimirt, er condensirt sich zu reinem Wasser und wir gewinnen die Condensationswärme oder die negative Verdampfungswärme. Also $q_w = q_s + l$.

Der durch diesen Kreisprocess erreichte Endzustand ist derselbe wie der Anfangszustand, wir erhalten Wasser und Salz getrennt bei derselben Temperatur.

Dieser Kreisprocess ist aber nicht reversibel, weil die Operation 1 nicht reversibel ist. Wohl kann man die Operationen 4, 3, 2 rückwärts ausführen und dadurch zu einer concentrirten Salzlösung von 0° kommen; von dieser können wir aber nicht zu dem Anfangszustand zurückgelangen, ohne dass wir noch eine Arbeit leisten, welche darin besteht, dass wir aus der Salzlösung die Salzmoecüle zusammenziehen und sie zu festem Salz vereinigen; dies ist dieselbe Arbeit, auf welche wir vorher schon geführt wurden, die negative Disgregationsarbeit oder die Arbeit gegen den osmotischen Druck. Gesetzt, wir könnten diese Arbeit d leisten, so ergibt nunmehr die Gleichsetzung der zu- bez. abgezogenen Wärmemengen die Gleichung:

$$q_w = q_s + l + d,$$

und da wegen der Gültigkeit des Babo'schen Gesetzes:

$$\varrho_w = \varrho_s$$

ist, folgt:

$$+l = -d;$$

also ist die Lösungswärme — abgesehen von dem kleinen auf Volumencontraction entfallenden Antheil — allein ein Aequivalent der Arbeit, welche nöthig ist, um die Salzmoleculé im Wasser zu vertheilen, oder, wenn wir die zwar bestimmten, aber noch streitigen Anschauungen van 't Hoff's annehmen, die Arbeit, welche der osmotische Druck bei der Lösung leistet.

Die Theorie der freien Energie, wie sie Herr von Helmholtz durchgeföhrt und auf den Lösungsvorgang angewendet hat, föhrt zu der besprochenen Gleichung für die Lösungs- bez. Verdünnungswärme dadurch, dass man die Differenz der freien Energie von reinem Wasser und der Salzlösung bildet. Ich habe mich bemüht, die Gleichung dadurch zu erweitern, dass ich die Aenderung der Gesamtenergie zu berechnen suchte. Die Ueberlegungen haben nicht zu einem klaren Ziele geföhrt, weil die Theorie der freien Energie basirt ist auf der Anwendbarkeit des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie, dieser aber nur auf unseren Kreisprocess angewendet werden kann, wenn man jene hypothetische osmotische Arbeit mit in den Kreis der Betrachtung zieht.

Ein weiteres Eingehen auf diese Frage muss ich mir bis zur Veröffentlichung der genauen Werthe für die Lösungswärmen einiger Salze bei 0° versparen.

7. Die gewonnenen Resultate fordern noch weiter zu einem Vergleich heraus mit der Theorie des osmotischen Druckes, die von van 't Hoff eingeföhrt, von Ostwald, Arrhenius und Anderen weiter ausgebaut ist. Nach dieser Theorie ist die relative Dampfspannungsverminderung Δ , welche durch Zusatz von P g eines Salzes vom Moleculargewicht M zu 100 g eines Lösungsmittels vom Moleculargewicht M' hervorgebracht wird, gegeben durch die Gleichung:

$$\Delta = \frac{M'}{M} \cdot \frac{P}{100}.$$

Für wässerige Normallösungen ist $P = 0,1 \cdot M$ und $M' = 18$,

$$\text{also: } \Delta = \frac{p_w - p_s}{p_w} = \frac{1}{55,5},$$

also bei 0° :

$$p_w - p_s = \frac{1}{55,5} \cdot p_w = 0,0832 \text{ mm Hg.}$$

Es ist bekannt, dass Arrhenius für Electrolyte den Widerspruch zwischen der Theorie und der Erfahrung durch die Einführung eines Activitätscoëfficienten i zu heben sucht, welchen er aus den Gefrierpunkterniedrigungen und aus der electrischen Leitfähigkeit berechnet.¹⁾ In der folgenden kleinen Tabelle IV stelle ich nebeneinander die für Normallösungen der hier in Betracht kommenden Salze von Arrhenius berechneten Werthe von i und denselben Coëfficienten berechnet aus meinen Dampfspannungsbeobachtungen.

Tabelle IV.

	i aus Gefrierpunktsbest. nach Arrhenius.	i aus electr. Leitfähigkeit nach Arrhenius.	i aus den Dampfspannungsbeobachtungen.
NaCl	1,90	1,82	1,92
KCl	1,82	1,86	1,78
KBr	1,90	1,92	1,74
KJ	1,90	1,92	1,82
LiCl	1,99	1,75	1,92
NaNO ₃	1,82	1,82	1,65

Die Uebereinstimmung der neu berechneten Werthe von i mit den Zahlen von Arrhenius ist keine sehr gute, indessen sind doch die vorkommenden Abweichungen nicht grösser als diejenigen, welche sich auch zwischen den Werthen von Arrhenius zeigen.

Um einen weiteren Vergleich zu ermöglichen, habe ich noch einige Beobachtungen über die Dampfspannungsverminderungen bei 0° von Nichtleitern ausgeführt, und zwar an Rohrzucker und an Harnstoff. Die Beobachtungen sind in der folgenden Tabelle V enthalten, welche genau ebenso angeordnet ist, wie Tabelle II.

1) Arrhenius, Zeitschr. f. phys. Chem. 1. p. 631. 1887.

Tabelle V.

Concentration	S	m_{10} mg Hg	Δ	π Dampfspannungs- verminderung	P_s
Rohrzucker, Moleculargewicht 341.					
0			26,6		4,62
2 n	68,2 g	26,6 mg		0,181 mm Hg	4,439
Harnstoff, Moleculargewicht 60.					
0 n			19,99		4,62
2 n	12,0	19,99	19,01	0,1354	4,485
4 n	24,0	39,00	21,2	0,2642	4,356
6 n	36,0	60,20	18,0	0,4078	4,212
10 n	60,0	96,20		0,6517	3,968

Die Beobachtungen zeigen, dass die durch diese Stoffe hervorgebrachten Dampfspannungsverminderungen nur etwa halb so gross sind, wie die durch die Salze bewirkten; die Activitätscoefficienten ergeben sich für Rohrzucker = 1,08 und für Harnstoff = 0,84, liegen also dem geforderten Werthe 1 ebenso nahe, wie diejenigen Werthe, welche Arrhenius für verschiedene Nichtleiter aus den Gefrierpunktsbeobachtungen berechnet.

Wenn nun auch die bisher aufgewiesene Uebereinstimmung die Dissociationstheorie zu bestätigen scheint, so muss doch ein Punkt hervorgehoben werden, welcher gegen sie spricht. Nach der Hypothese von Arrhenius müssen wir annehmen, dass i von der Concentration abhängt, und zwar mit zunehmender Concentration abnimmt; zu dieser Annahme zwingen uns die Beobachtungen über die Abhängigkeit der electrischen Leitfähigkeit der Salzlösungen von der Concentration. Berechnen wir an der Hand der neuen Beobachtungen die Activitätscoefficienten für die verschiedenen Concentrationen, so finden wir nur in einem Falle, bei den Lösungen von NaNO_3 , eine, wenn auch geringe, Abnahme der i mit zunehmender Concentration, für KCl , KBr und KJ würde i constant und für NaCl und LiCl sogar zunehmend sein mit steigender Concentration.

Diese Thatsache steht mit der Dissociationshypothese in Widerspruch; an der Realität derselben wird man aber nicht zweifeln können, wenn man bedenkt, dass Tamman und Emden bei denselben Salzen die gleiche Beobachtung gemacht haben.

Breslau 1891.

II. *Bestimmung der Elasticitätsconstanten einiger dichter Mineralien; von P. Drude und W. Voigt.*

Mitgetheilt von W. Voigt.

Die im Folgenden mitgetheilten Untersuchungen über die Elasticitätsverhältnisse dichter Mineralien sollen einerseits nur Zahlenwerthe für gewisse wohldefinierte und nach aller Wahrscheinlichkeit, wie auch nach dem Resultat der angestellten Prüfungen sehr vollständig isotrope Körper liefern, andererseits aber und hauptsächlich zur Prüfung der von mir früher mitgetheilten Theorie der Elasticität für isotrope Körper dienen.

Nach dieser Theorie¹⁾ bestehen die meisten, vielleicht alle uns isotrop erscheinenden Körper aus Krystallfragmenten, welche in allen möglichen Orientirungen theils mit, theils ohne ein zwischenliegendes Bindemittel aneinander gefügt sind. Sind diese Krystallbrocken sämmtlich von gleicher Substanz, dabei klein gegen die Dimensionen der beobachteten Stücke des Mittels, aber gross gegen die Molecularwirkungssphäre, und erfüllen sie ohne fremde Zwischenschicht den ganzen Körper, so ist es möglich, die Elasticitätsconstanten des aus ihnen gebildeten „quasi isotropen“ Körpers aus denjenigen der regelmässig krystallisirten Substanz zu berechnen. Befinden sich aber zwischen den einzelnen Fragmenten Räume von derselben Grössenordnung, welche mit Luft oder einem andern Mittel von sehr geringem elastischen Widerstand erfüllt sind, so werden die absoluten Werthe der Constanten zwar kleiner ausfallen, als die vorstehende Berechnung ergibt, ihr Verhältniss aber wird den berechneten Werth sehr nahe annehmen müssen.

Eine experimentelle Prüfung der auseinandergesetzten Theorie erfordert die Bestimmung der Elasticitätsconstanten mehrerer Substanzen sowohl im regelmässig krystallisirten, als im dichten Vorkommen; über die Schwierigkeit der Auf-

1) W. Voigt, Wied. Ann. 38. p. 573. 1880.

findung hierzu brauchbaren Materiales habe ich früher gesprochen.

Der Untersuchung sind unterworfen worden: Dichter Flussspath, Solnhofener Lithographenstein, zwei Sorten dichter Baryt, Feuerstein, Opal, zwei Sorten Obsidian; die Mittheilung der an ihnen erhaltenen Resultate bildet den Inhalt der nachfolgenden Arbeit.

Die Zahlwerthe, welche die Beobachtung der erstgenannten vier Substanzen geliefert hat, sind, soweit sie zur Prüfung der erwähnten Theorie dienen konnten, schon früher mitgetheilt worden.¹⁾ Die Uebereinstimmung der beobachteten mit den berechneten Constantenverhältnissen war im Allgemeinen befriedigend, in einem Falle sogar sehr gut.

Von den an den übrigen Mineralien erhaltenen Constanten kommen die auf die Obsidiane bezüglichen für die Prüfung der Theorie garnicht in Betracht. Von den Feuerstein und Opal entsprechenden Zahlen möchte man von vornherein das Gleiche annehmen; indessen wird sich zeigen, dass ihnen doch für die angeregte Frage eine gewisse und, wie mir scheint, sehr entscheidende Bedeutung zukommt.

Von den Messungen hat Hr. Drude den grössten Theil der Dimensions- und Biegungsbeobachtungen ausgeführt, ich habe die übrigen, sowie sämtliche Drillungsbeobachtungen angestellt. Die Mittheilung der Resultate geschieht im Folgenden ebenso auszugsweise, wie in den früheren, die Elasticitätsconstanten regelmässiger Krystalle betreffenden Publicationen; etwas ausführlichere Beobachtungstabellen finden sich an den unten angeführten Orten²⁾. In den Tabellen habe ich, weil mitunter die absoluten Werthe der Biegungs- und Drillungswiderstände E und T für verschiedene Stäbchen in Folge von Unregelmässigkeiten der Form oder von innern Störungen ziemlich von einander abweichen, ihre Verhältnisse aber, auf welche jene Umstände weniger einwirken, nahezu gleich sind, alle auf dasselbe Stäbchen bezüglichen Beobachtungen zusammengestellt.

Um eine gewisse Sicherheit dafür zu erlangen, dass

1) W. Voigt. I. c. p. 585.

2) P. Drude u. W. Voigt, Gött. Nachr. 1889, Nr. 19. 1890, Nr. 16.

innerhalb der untersuchten Körper merkliche Veränderungen der Elasticität mit der Richtung nicht stattfinden, sind, soweit es anging, die Stäbe so geschnitten, dass die Breitseite der einen Gattung (A) in die Ebene der Schmalseite der anderen (B) fällt, während die Längsrichtungen beider übereinstimmen. Wären die Richtungen normal zur Längsaxe elastisch ungleichwerthig, so müssten im Allgemeinen die Drillungen bei diesen beiden Gattungen von Stäben verschiedene Widerstände finden. Indessen hat die Beobachtung in keinem Falle derartiges ergeben.

Die Bedeutung der Bezeichnungen in den folgenden Tafeln ist dieselbe wie in den früher mitgetheilten. L , B , D sind die bei den bezüglichen Messungen in Rechnung zu ziehenden Dimensionen der benutzten Prismen, die ersteren in mm, die letzteren in (1/992,6) mm ausgedrückt. Die η sind die in 0,000 295 4 mm ausgedrückten Biegungen bei der Belastung P , die η' die Eindrücke der Lager resp. der Belastungsschneide bei derselben Belastung, berechnet mit Hilfe von besonderen Biegungsbeobachtungen, welche die Stäbchen in der Länge von nur 14 mm benutzten. Die σ sind die bereits von der Tangente auf den Bogen reducirten Ablesungen an der Beobachtungsscala, die erhalten wurden bei einer Drillung des Stäbchens mit dem Gewicht P an dem Hebelarm $R = 36,80$ mm, ausgedrückt in Millimetern der Scala, die um 0,003 74 zu gross waren. Die Scala stand um $A = 5173$ mm von den mit dem gedrillten Stäbchen verbundenen Spiegeln ab.

ϑ ist die Temperatur nach Reaumur, bei welcher die Messungen vorgenommen sind; wo dieselbe nicht ausdrücklich erwähnt ist, war sie nahe 14° .

Die Berechnung der Biegungswiderstände E und Biegungscoefficienten E geschah nach der Formel:

$$E = \frac{1}{E} = \frac{PL^3}{4(\eta - \eta') D^3 B},$$

die der Drillungswiderstände T und Drillungscoefficienten T nach:

$$T = \frac{1}{T} = \frac{6 P R L A}{\sigma D^3 B \left(1 - \frac{D}{B} 0,630\right)};$$

aus ihnen folgen die beiden Elasticitätsconstanten a und b durch die Beziehungen:

$$a = \frac{T(4T-E)}{(3T-E)}, \quad b = \frac{T(E-2T)}{(3T-E)}.$$

Die Erfüllung der Poisson'schen Relation:

$$a = 3b$$

$$\text{verlangt, dass:} \quad \frac{E}{T} = 2,5.$$

1. **Dichter Flussspath** von Stolberg am Harz; ich verdanke das bezügliche Stück Herrn Prof. Liebisch.

Farbe grau mit röthlichen Flecken; Gefüge äusserst feinkörnig, doch nicht ganz frei von Störungen und Sprüngen. Gestalt der Stäbchen sehr regelmässig, Politur ziemlich vollkommen.

A I.	Biegung.	$L = 64,07,$	$B = 5986,$	$D = 1854,7,$	$P = 110,$	
		$\eta = 60,55,$	$\eta' = 1,70$			$E = 10\,570\,000.$
	Drillung.	$L = 50,07,$	$B = 5991,$	$D = 1855,9,$	$P = 100.$	
		$\sigma = 42,0$				$T = 4\,280\,000.$
						$E/T = 2,47.$

Der Werth von T ist nicht sehr sicher.

A II.	Biegung.	$L = 14,07,$	$B = 5970,$	$D = 1858,1,$	$P = 110,$	
		$\eta = 2,35;$				
		$L = 58,07,$				
		$\eta = 45,95,$	$\eta' = 1,70$			$E = 10\,420\,000.$
	Drillung.	$L = 45,54,$	$B = 5976,$	$D = 1858,8,$	$P = 100,$	
		$\sigma = 38,25$				$T = 4\,285\,000.$
						$E/T = 2,44.$

A III.	Biegung.	$L = 48,07,$	$B = 6008,5,$	$D = 1841,8,$	$P = 110,$	
		$\eta = 27,25,$	$\eta' = 1,60$			$E = 10\,420\,000.$
	Drillung.	$L = 29,06,$	$B = 6009,$	$D = 1842,3,$	$P = 100,$	
		$\sigma = 25,0$				$T = 4\,300\,000.$
						$E/T = 2,43.$

B I.	Biegung.	$L = 64,07,$	$B = 6135,$	$D = 1836,8,$	$P = 110,$	
		$\eta = 61,25,$	$\eta' = 1,60,$			$E = 10\,490\,000.$
	Drillung.	$L = 49,95,$	$B = 6139,$	$D = 1837,9,$	$P = 100,$	
		$\sigma = 42,05$				$T = 4\,254\,000.$
						$E/T = 2,465.$

B II.	Biegung.	$L = 14,07,$	$B = 5888,$	$D = 1857,3,$	$P = 110,$	
		$\eta = 2,15;$				
		$L = 48,07,$				
		$\eta = 27,35,$	$\eta' = 1,60$			$E = 10\,340\,000.$

Drillung. $L = 52,45$, $B = 5901$, $D = 1855,0$, $P = 100$,
 $\sigma = 44,8$ $T = 4\,290\,000$.
 $E/T = 2,41$.

Gesamtmittel $E = 10\,450\,000$, $E = 9,570 \cdot 10^{-8}$, $E/T = T/E = 2,44$.
 $T = 4\,282\,000$, $T = 23,35 \cdot 10^{-8}$.
 $a = 11\,900\,000$, $b = 3\,370\,000$, $a = 3,53 \cdot b$.

2. Solnhofener Lithographenstein, in der bekannten feinkörnigen Structur.

A I. Biegung. $L = 14,07$, $B = 5948$, $D = 1751,3$, $P = 110$,
 $\eta = 3,7$;
 $L = 64,07$,
 $\eta = 128,65$, $\eta' = 2,3$ $E = 5\,885\,000$.
 Drillung. $L = 48,50$, $B = 5945$, $D = 1753,7$, $P = 50$,
 $\sigma = 43,8$ $T = 2\,346\,000$.
 $E/T = 2,51$.

B I. Biegung. $L = 64,07$, $B = 5957$, $D = 1769,3$, $P = 110$,
 $\eta = 124,65$, $\eta' = 2,30$ $E = 5\,890\,000$.
 Drillung. $L = 52,02$, $B = 5953$, $D = 1771,0$, $P = 50$,
 $\sigma = 45,3$, $T = 2\,362\,000$.
 $E/T = 2,495$.

Mittel $E = 5\,888\,000$, $E = 16,98 \cdot 10^{-8}$, $E/T = T/E = 2,505$.
 $T = 2\,354\,000$, $T = 42,48 \cdot 10^{-8}$.
 $a = 7\,070\,000$, $b = 2\,370\,000$, $a = 2,99 \cdot b$.

3. Dichter Baryt von Clausthal im Harz, hell grau-grünlich; anscheinend ziemlich homogen und wenig gestört. Eingeschlossene Körnchen einer härteren Substanz bilden auf den polirten Flächen kleine Erhebungen und erschweren die Bestimmung der Dicke der Stäbchen.

A I. Biegung. $L = 61,07$, $B = 6120$, $D = 1268$, $P = 110$,
 $\eta = 282,9$, $\eta' = 2,7$, $E = 5\,880\,000$.
 Drillung. $L = 48,20$, $B = 6128$, $D = 1267$, $P = 40$,
 $\sigma = 86,6$, $T = 2\,270\,000$.
 $E/T = 2,59$.

A II. Biegung. $L = 14,07$, $B = 6125$, $D = 1259$, $P = 110$,
 $\eta = 5,8$;
 $L = 61,07$,
 $\eta = 289,2$, $\eta' = 2,3$, $E = 5\,880\,000$.
 Drillung. $L = 32,33$, $B = 6127$, $D = 1252$, $P = 40$,
 $\sigma = 58,5$, $T = 2\,330\,000$.
 $E/T = 2,52$.

5. **Feuerstein** von der Insel Rügen, durch die Güte des Hrn. Prof. Cohen in Greifswald erhalten. Im ganzen Stücke dunkelgrau, zu Stäbchen geschnitten im durchgehenden Lichte hell gelbbraun. Die Herstellung der Stäbchen hat infolge der Zähigkeit des Materiales grosse Schwierigkeiten verursacht.

A I. Biegung. $L=14,07$, $B=6312$, $D=1226,7$, $P=110$, $\vartheta=14$,

$\eta=5,0$,

$L=70,07$,

$\eta=353,4$, $\eta'=2,1$,

$E = 7\,598\,000$.

Drillung. $L=57,11$, $B=6318$, $D=1227,3$, $P=50$, $\vartheta=14,5$,

$\sigma=87,8$,

$T = 3\,510\,000$.

$E/T = 2,17$.

A II. Biegung. $L=66,07$, $B=6338$, $D=1222,2$, $P=110$, $\vartheta=15$,

$\eta=298,7$, $\eta'=2,1$,

$E = 7\,590\,000$.

Drillung. $L=52,23$, $B=6337$, $D=1223,4$, $P=50$, $\vartheta=16$,

$\sigma=80,5$,

$T = 3\,522\,000$.

$E/T = 2,155$.

A III. Biegung. $L=66,07$, $B=5740$, $D=1180,2$, $P=110$, $\vartheta=14$,

$\eta=367,4$, $\eta'=2,4$,

$E = 7\,583\,000$.

B I. Biegung. $L=14,07$, $B=6432$, $D=1215,6$, $P=110$, $\vartheta=14,5$,

$\eta=5,0$;

$L=64,07$,

$\eta=273,2$, $\eta'=2,1$,

$E = 7\,589\,000$.

Drillung. $L=56,84$, $B=6438$, $D=1217,1$, $P=50$, $\vartheta=15$,

$\sigma=87,3$,

$T = 3\,522\,000$.

$E/T = 2,155$.

B II. Biegung. $L=64,07$, $B=6436$, $D=1224,0$, $P=110$, $\vartheta=14,3$,

$\eta=265,8$, $\eta'=2,1$,

$E = 7\,640\,000$.

Drillung. $L=55,08$, $B=6437$, $D=1224,6$, $P=50$, $\vartheta=14,5$,

$\sigma=83,05$,

$T = 3\,520\,000$.

$E/T = 2,165$.

B III. Biegung. $L=62,07$, $B=6434$, $D=1218,1$, $P=110$, $\vartheta=14$,

$\eta=247,7$, $\eta'=2,1$,

$E = 7\,568\,000$.

Drillung. $L=48,00$, $B=6441$, $D=1218,5$, $P=50$, $\vartheta=13,2$,

$\sigma=88,1$,

$T = 3\,523\,000$.

Mittel $E = 7\,597\,000$, $E = 13,16 \cdot 10^{-3}$,

± 7200 $\pm 0,012$

$T = 3\,521\,000$, $T = 28,41 \cdot 10^{-3}$, $E/T = T/E = 2,158$.

± 1800 $\pm 0,015$

Hieraus $a = 7\,700\,000$, $b = 523\,000$, $a = 14,71 \cdot b$.

6. **Opal** aus Mexiko; von Hrn. Prof. Liebisch mir freundlichst überlassen.

Ein wasserhelles Stück ohne Farbenspiel, von einigen

Sprüngen durchsetzt, die sich beim Schneiden der Stäbchen noch ausbreiteten. Dieser Umstand gestattete nicht, die Stäbchen in zwei Orientirungen A und B, sondern nur in einer herzustellen. Eine strenge Prüfung der elastischen Isotropie war sonach nicht möglich, auch besitzen die erhaltenen Zahlen der Kürze der Stäbchen wegen nur geringe Genauigkeit.

I. Biegung.	$L = 14,07,$	$B = 6145,$	$D = 603,4,$	$P = 105,$	$\vartheta = 14,$	
	$\eta = 49,5;$					
	$L = 22,07,$					
	$\eta = 181,1,$	$\eta' = 3,7,$				$E = 3\ 870\ 000.$
Drillung.	$L = 17,05,$	$B = 6146,$	$D = 602,8,$	$P = 10,$	$\vartheta = 13,5,$	
	$\sigma = 81,5,$					$T = 1\ 833\ 000.$
II. Biegung.	$L = 14,07,$	$B = 6134,$	$D = 607,5,$	$P = 105,$	$\vartheta = 14,$	
	$\eta = 48,5,$	$\eta' = 3,7,$				$E = 3\ 908\ 000.$
III. Biegung.	$L = 20,07,$	$B = 6144,$	$D = 600,4,$	$P = 105,$	$\vartheta = 14,$	
	$\eta = 139,3,$	$\eta' = 3,7,$				$E = 3\ 870\ 000.$
Drillung.	$L = 15,70,$	$B = 6144,$	$D = 599,6,$	$P = 10,$	$\vartheta = 14,2,$	
	$\sigma = 76,6,$					$T = 1\ 824\ 000.$
Mittel	$E = 3\ 880\ 000, E = 25,8 \cdot 10^{-8},$					
	$T = 1\ 829\ 000, T = 54,7 \cdot 10^{-8}, E/T = T/E = 2,12.$					
Hieraus	$a = 3\ 910\ 000, b = 272\ 000, a = 14,4 \cdot b.$					

7. Obsidian von den Liparischen Inseln von Hrn. Dr. Sella in Biella mir freundlichst besorgt.

Farbe unregelmässig hell- und dunkelgrau gefleckt; die Stäbchen sind parallel der Dickenrichtung ziemlich durchsichtig. Die Färbung wird durch in der hellen Grundmasse suspendirte Flocken und Körnchen hervorgebracht. Das Mineral ist ein relativ grobes Gemisch und eine Bestimmung seiner Constanten mit der äussersten Genauigkeit hat keinen Zweck.

Die mir verfügbaren Stücken erlaubten die Herstellung von Stäben in einer Länge bis nahe 11 cm; da mein Torsionsapparat aber die Verwendung so langer Stäbe nicht gestattete und die an einigen kürzeren erhaltenen Werthe von T unter sich gut stimmten, so habe ich die längeren Stücke nicht um der Drillung wegen kürzen mögen.

A I. Biegung.	$L = 85,07,$	$B = 5944,$	$D = 1462,7,$	$P = 60,$	$\vartheta = 14,$	
	$\eta = 246,1,$	$\eta' = 1,5,$				$E = 6\ 671\ 000.$
Drillung.	$L = 63,24,$	$B = 5932,$	$D = 1463,0,$	$P = 50,$	$\vartheta = 13,$	
	$\sigma = 80,4,$					$T = 2\ 859\ 000.$

A II.	Biegung.	$L=105,07,$ $\eta=470,6,$	$B=5946,$ $\eta'=1,5,$	$D=1458,1,$	$P=60,$ $\vartheta=14,$	$E=6\ 615\ 000.$
A III.	Biegung.	$L=14,07,$ $\eta=3,0;$ $L=105,7,$ $\eta=480,5$	$B=5951,$ $\eta'=1,5,$	$D=1442,4,$	$P=60,$ $\vartheta=14,$	$E=6\ 686\ 000.$
B I.	Biegung.	$L=14,07,$ $\eta=2,3;$ $L=85,07,$ $\eta=246,4,$	$B=6006,$ $\eta'=1,5,$	$D=1457,7,$	$P=60,$ $\vartheta=14,$	$E=6\ 659\ 000.$
	Drillung.	$L=64,78,$ $\sigma=79,95,$	$B=6006,$	$D=1457,2,$	$P=50,$ $\vartheta=14,1,$	$T=2\ 846\ 000.$
B II.	Biegung.	$L=98,07,$ $\eta=317,8,$	$B=6009,$ $\eta'=1,5,$	$D=1463,1,$	$P=60,$ $\vartheta=14,$	$E=6\ 675\ 000.$
B III.	Drillung.	$L=58,27,$ $\sigma=72,75,$	$B=6010,$	$D=1454,8,$	$P=50,$ $\vartheta=13,2,$	$T=2\ 819\ 000.$
Mittel		$E=6\ 651\ 000,$ ± 9000	$E=15,03 \cdot 10^{-3},$ $\pm 0,02$			
		$T=2\ 841\ 000,$ ± 8000	$T=35,20 \cdot 10^{-3},$ $\pm 0,10$		$E/T = T/E = 2,34.$	
Hieraus		$a=7\ 153\ 000,$	$b=1\ 470\ 000,$	$a=4,86 \cdot b.$		

8. Obsidian von Arnarfells (Jökul auf Island) durch die Güte des Hrn. Prof. C. Klein in Berlin erhalten; von tiefschwarzer Farbe.

Ein Beobachtungsmaterial ersten Ranges von seltener Homogenität, wie dies das Aussehen des Mineralen und die grosse Uebereinstimmung der im Folgenden mitgetheilten Zahlen erweist. Das schöne Stück gestattete die Herstellung von Stäben, deren Länge fast 13 cm erreichte; ihre Gestalt ist sehr regelmässig ausgefallen.

Für die Drillungsbeobachtungen wurde nur ein kürzerer Stab der Gattung B und ein in zwei Hälften zerlegter langer der Gattung A benutzt. Da die an ihnen erhaltenen Drillungswiderstände sehr gut übereinstimmen, habe ich, um das schöne Material für andere Bestimmungen aufzusparen, weitere Drillungsbeobachtungen unterlassen.

A I.	Biegung.	$L=100,07,$ $\eta=355,7,$	$B=6005,$ $\eta'=1,3,$	$D=1468,1,$	$P=60,$ $\vartheta=15,1,$	$E=7\ 340\ 000.$
A II.	Biegung.	$L=14,07,$ $\eta=2,15;$ $L=100,07,$ $\eta=353,0,$	$B=5999,$ $\eta'=1,3,$	$D=1473,3,$	$P=60,$ $\vartheta=15,1,$	$E=7\ 323\ 000.$

A III. Drillung.	$L=43,99,$ $\sigma=48,65,$	$B=6010,$	$D=1472,7,$	$P=50,$ $\vartheta=14,$ $T=3\,085\,000.$
A IV. Drillung.	$L=46,62,$ $\sigma=50,65,$	$B=6001,$	$D=1478,9,$	$P=50,$ $\vartheta=13,5,$ $T=3\,100\,000.$
B I. Biegung.	$L=100,07,$ $\eta=343,6,$	$B=6018,$ $\eta'=1,3,$	$D=1483,3,$	$P=60,$ $\vartheta=15,1,$ $E=7\,345\,000.$
B II. Biegung.	$L=14,07,$ $\eta=2,5;$ $L=100,07,$ $\eta=344,3,$ $\eta'=1,3,$	$B=6018,$	$D=1482,3,$	$P=60,$ $\vartheta=15,1,$ $E=7\,345\,000.$
B III. Biegung.	$L=100,07,$ $\eta=348,3,$	$B=6021,$ $\eta'=1,3,$	$D=1476,9,$	$P=60,$ $\vartheta=15,1,$ $E=7\,330\,000.$
B IV. Drillung.	$L=60,55,$ $\sigma=65,65,$	$B=6019,$	$D=1479,7,$	$P=50,$ $\vartheta=13,1,$ $T=3\,096\,000.$
Mittel	$E=7\,337\,000,$ $E=13,63 \cdot 10^{-8},$ ± 3000 $\pm 0,005$			
	$T=3\,094\,000,$ $T=32,31 \cdot 10^{-8},$ $E/T=T/E=2,37.$ ± 3000 $\pm 0,03$			
Hieraus	$a=8\,017\,000,$ $b=1\,828\,000,$ $a=4,39 \cdot b.$			

Den vorstehend mitgetheilten Constantenwerthen habe ich, nachdem die Hälfte von ihnen schon früher Verwendung gefunden hat, nur wenig hinzuzufügen.

Die für die beiden Obsidiane geltenden Zahlen liegen nicht allzuweit von denjenigen, die ich ehemals an zwei künstlichen Glassorten bestimmt habe¹⁾; das Verhältniss a/b ist bei ihnen gleichfalls erheblich grösser als 3 gefunden worden.

Ein besonderes Interesse besitzen die für Opal und Feuerstein erhaltenen Constantenwerthe, namentlich die letzteren, welche mit einem sehr geringen wahrscheinlichen Fehler behaftet, also sehr zuverlässig sind.

Aus ihnen folgt für Feuerstein das Constantenverhältniss

$$\frac{a}{b} = 14,7,$$

eine Grösse, welche weit abliegt von allen bisher gefundenen Werthen, wie auch von dem Poisson'schen $a/b=3$.

Einerseits widerlegen sie endgültig die mitunter ausgesprochene Vermuthung, dass die bisher bei anderen Körpern gefundenen Abweichungen von der Poisson'schen Zahl eine Wirkung irgend welcher Störungen wäre, denn das Material,

1) W. Voigt, Wied. Ann. 15. p. 497. 1882.

auf welches sie sich beziehen, ist durch die Beobachtungen selbst als höchst vollkommen isotrop erwiesen.

Andererseits liefern sie eine eigenthümliche Bestätigung der oben erwähnten Theorie der Elasticität quasi-isotroper Körper.

Feuerstein besteht nach der wohl allgemein angenommenen Auffassung in der Hauptsache aus krystallisirter Kieselsäure mit einer mehr oder weniger grossen Beimengung von amorpher Kieselsäure; letztere wird mitunter als verschwindend klein betrachtet. Ob die krystallisirte Kieselsäure im Feuerstein in der Form des Quarzes oder des Chalcedones oder einer dritten Varietät vorkommt, ist, soviel ich weiss, noch nicht entschieden. Nun findet Folgendes statt.

Die Elasticitätsconstanten des regelmässig krystallisirten Quarzes habe ich früher bestimmt und mitgetheilt¹⁾, auch später aus ihnen die beiden Constanten des dichten, quasi-isotropen Quarzes berechnet. Diese Zahlen, welche aus sechs an sich nicht sehr sicheren Werthen durch eine umständliche Rechnung, also mit noch grösserer Unsicherheit bestimmt sind, geben, wie ich schon früher angeführt habe²⁾, das von allen ähnlich berechneten weit abliegende Verhältniss:

$$\frac{a}{b} = 13,7.$$

Dieser Werth liegt in Anbetracht seiner geringen Genauigkeit dem oben für Feuerstein erhaltenen, gleichfalls ungewöhnlichen:

$$\frac{a}{b} = 14,7$$

so nahe, dass man diesen Umstand als eine Bestätigung der aufgestellten Theorie bezeichnen darf, wenngleich noch nicht entschieden ist, ob die krystallisirte Kieselsäure im Feuerstein überwiegend als Quarz enthalten ist.

Auch die für Opal gefundenen Zahlen stehen mit der angeregten Frage in einem gewissen Zusammenhange. Ist nämlich auch zwar der elastische Widerstand des Opals nur

1) W. Voigt, Wied. Ann. 31. p. 701. 1887.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 38. p. 582. 1889.

etwa die Hälfte von dem des Feuerstein, so findet sich doch für seine beiden Constanten das Verhältniss:

$$\frac{a}{b} = 14,4,$$

welches mit dem bei Feuerstein geltenden fast völlig zusammenfällt.

Dies Resultat scheint mir zunächst zu verlangen, dass die amorphe Kieselsäure aus Fragmenten einer — wahrscheinlich von Quarz und Chalcedon abweichenden dritten — krystallinischen Varietät besteht. Denn, wie ich schon früher betont habe¹⁾, gilt für einen Körper, der in dem Sinne amorph und isotrop ist, dass seine, gleichviel welche polaren Kräfte ausübenden, Molecüle *in ihm alle möglichen gegenseitigen Lagen besitzen*, mit Nothwendigkeit die Beziehung:

$$\frac{a}{b} = 3.$$

Die Bestimmung der Elasticitätsconstanten einer Substanz bietet hiernach ein, vielleicht auch in anderen Fällen vortheilhaftes Mittel, um die kryptokrystallinische Natur derselben festzustellen.

Der für Opal gefundene Werth des Verhältnisses a/b scheint mir ferner auch die Beweiskraft der für Feuerstein gefundenen Zahl zu steigern. Denn einmal zeigt er, dass die Frage, in wie weit in Feuerstein amorphe Kieselsäure vorhanden ist, für unseren Zweck ganz irrelevant ist; denn ihre Beimischung würde das Constantenverhältniss nicht ändern. Und auch die Frage, ob die krystallisirte Kieselsäure in ihm just in der Form von Quarz vorhanden ist, verliert an Bedeutung; denn die an Opal beobachteten und die aus den am Quarz gefundenen Zahlen berechneten Constanten geben dasselbe Verhältniss von rund $a/b = 14$, sodass man dieses mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit als der Kieselsäure individuell betrachten möchte.

Göttingen, Januar 1891.

1) W. Voigt, Wied. Ann. 38. p. 574. 1889.

III. *Hydrodynamisch-akustische Untersuchungen;* *von Walter König.*

II. Ueber die Kräfte zwischen zwei Kugeln in einer schwingenden Flüssigkeit und über die Entstehung der Kundt'schen Staubfiguren.

Wir gehen wieder von der Voraussetzung einer unbegrenzten Flüssigkeit aus, die in der Richtung der Z-Axe geradlinig hin- und herströme. Statt einer sollen sich zwei starre Kugeln in der Flüssigkeit befinden; ihre Massen seien gegen die der von ihnen verdrängten Flüssigkeit gross genug, um ihre Mitbewegung mit der Schwingung der Flüssigkeit vernachlässigen, d. h. die Kugeln als in der Flüssigkeit ruhend betrachten zu können. In diesem Falle wird die Symmetrie der Flüssigkeitsbewegung und der Druckvertheilung, welche um eine einzelne Kugel herum statt hat, durch die Anwesenheit der zweiten Kugel gestört, und es ergeben sich für jede Kugel Resultanten der Flüssigkeitsdrucke, welche die Kugeln in bestimmten, von ihrer gegenseitigen Lage abhängigen Richtungen fortzubewegen suchen. Die Art dieser Kräfte, welche die beiden Kugeln scheinbar aufeinander ausüben, ist durch die theoretischen und experimentellen Arbeiten von Bjerknes¹⁾ klargelegt worden. Diese Arbeiten behandeln allerdings den umgekehrten Fall, dass nämlich die Flüssigkeit ruht und die Kugeln sich bewegen; aber man kann offenbar von der Lösung dieses Problems ganz unmittelbar zu der Lösung unseres Problems dadurch gelangen, dass man sich dem ganzen, aus Flüssigkeit und Kugeln bestehenden Systeme in jedem Augenblick die gleiche, aber gerade entgegengesetzte Geschwindigkeit ertheilt denkt, wie sie Bjerknes bei seinen Kugel voraussetzt. Dann werden in Wahrheit die Kugeln ruhen und die Flüssigkeit wird sich

1) Bjerknes, Rep. der reinen und angewandten Mathematik. 1. p. 264. 1876. — Schiötz, Gött. Nachr. 1877. p. 291.

bewegen; jene scheinbaren Kräfte zwischen den Kugeln aber werden durch diese Gesamtbewegung des Systems nicht geändert werden.

Bjerknes gibt das Potential der scheinbaren Kraft, die zwischen zwei in einer Flüssigkeit bewegten Kugeln von unveränderlichem Volumen besteht, in zwei verschiedenen Formen.¹⁾ Die eine Form gibt mit ihren Ableitungen den Werth der Kraftcomponenten in einem einzelnen Augenblicke, die andere gestattet den Mittelwerth der Kraft zu berechnen für den Fall, dass beide Kugeln gleichzeitig periodische Schwingungen ausführen. Es ist bekannt, dass diese Kräfte in Grösse und Richtung den fortbewegenden Kräften entsprechen, welche zwei magnetische Molecüle am Ort der Kugelmittelpunkte auf einander ausüben. Aber zwischen den beiden genannten Fällen besteht nach Bjerknes folgender Unterschied. Die Kraft, welche die erste Kugel auf die zweite in jedem Augenblicke ihrer Bewegung ausübt, ist so beschaffen, als ob in jedem Kugelcentrum ein Magnet läge, dessen Axe der Bewegungsrichtung der ersten Kugel parallel orientirt ist; umgekehrt entspricht die Kraft, welche die zweite Kugel auf die erste ausübt, der Wirkung zweier Magnete, deren Axen der Bewegungsrichtung der zweiten Kugel parallel sind. Dagegen ist die mittlere Kraftwirkung zweier schwingenden Kugeln aufeinander gleich der Wirkung zweier Magnete, deren jeder der Bewegungsrichtung der Kugel, an deren Stelle er tritt, parallel orientirt ist. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Richtung der fortschreitenden Bewegung immer als Richtung eines bestimmten Poles, etwa des Nordpoles, genommen wird, und es gilt ferner bei dieser Art der Festsetzung die Einschränkung, dass die hydrodynamischen Wirkungen den magnetischen zwar gleich, aber dem Vorzeichen nach gerade entgegengesetzt sind; d. h. für diese Analogien gilt der Satz: gleiche Pole ziehen sich an, ungleiche stossen sich ab.

Vergleicht man die beiden Formeln, welche Bjerknes für die eine und die andere Form der hydromagnetischen Wirkung aufgestellt hat, so sieht man, dass sie identisch werden,

1) Bjerknes, l. c. p. 270 u. 271.

wenn die beiden Kugeln sich in parallelen Richtungen und in jedem Augenblicke mit gleicher Geschwindigkeit bewegen. In dem Fall also, dass die beiden Kugeln Oscillationen in parallelen Geraden mit gleichen Amplituden und in gleichen Phasen ausführen, ist die mittlere Kraft, mit der sie aufeinander wirken, direct gleich dem mittleren Werthe der Kraft, welche in jedem einzelnen Augenblicke zwischen ihnen besteht. Dieses ist aber gerade derjenige Fall, von dem wir bei der Behandlung unseres Problems ausgehen müssen.

Um die besonderen, für unseren Fall geltenden Formeln aufzustellen, will ich an diejenige Darstellung anknüpfen, welche Kirchhoff in der 18. und 19. Vorlesung seiner Mechanik von diesem Gegenstande gegeben hat. R und R' seien die Radien der beiden Kugeln, $u v w, u' v' w'$ die Componenten ihrer Geschwindigkeiten, $a, b, c, a' b' c'$ die Coordinaten ihrer Mittelpunkte, r_0 der Abstand der Mittelpunkte der Kugeln und r und r' die Abstände eines beliebigen Punktes $x y z$ von dem einen und dem anderen Mittelpunkte. Bewegen sich die beiden Kugeln in parallelen Geraden mit in jedem Augenblicke gleichen Geschwindigkeiten, und setzen wir die Z -Axe ihrer Bewegungsrichtung parallel, so sind die Geschwindigkeitscomponenten $u = v = u' = v' = 0$ und $w = w'$. Das Geschwindigkeitspotential ist durch eine unendliche Reihe darstellbar, deren erste Glieder sich nach diesen Festsetzungen auf die folgenden Werthe reduciren¹⁾:

$$\varphi = -w \left\{ \frac{R^2}{2} \frac{\partial}{\partial c} \frac{1}{r} + \frac{R'^2}{2} \frac{\partial}{\partial c'} \frac{1}{r'} - \frac{R^2 R'^2}{4} \left[\frac{\partial^2}{\partial a \partial c} \frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial a'} \frac{1}{r'} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial^2}{\partial b \partial c} \frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial}{\partial b} \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial b'} \frac{1}{r'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial c \partial c'} \frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial}{\partial c} \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial c'} \frac{1}{r'} \right) \right] \right\}.$$

Endlich sind die Kräfte, welche die beiden Kugeln scheinbar aufeinander ausüben, für den Fall, dass ihre Bewegung eine gleichförmige, also w eine Constante ist, die nach $a b c$, bez. $a' b' c'$ genommenen partiellen Differentialquotienten des Ausdrucks²⁾:

1) Kirchhoff, Mechanik. p. 230. 1877.

2) Kirchhoff, Mechanik. p. 251. 1877.

$$\Omega = -\pi\mu R^3 R'^3 w^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c^2}.$$

Denkt man sich zu dieser Bewegung eine Gesamtbewegung des ganzen aus der Flüssigkeit und den beiden Kugeln bestehenden Systems von gleicher, aber der Bewegung der Kugeln entgegengerichteter Geschwindigkeit hinzugefügt, so sind in Wahrheit die Kugeln in Ruhe und die Flüssigkeit strömt in der Unendlichkeit mit der Geschwindigkeit w in der Richtung der $-Z$ -Axe. Bezogen auf ein ruhendes Coordinatensystem hat das Geschwindigkeitspotential dann die Form:

$$\varphi = w \left\{ -z + \frac{R^2}{2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} + \frac{R'^2}{2} \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial z} - \frac{R^3 R'^3}{4} \left[\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a \partial c} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)}{\partial x} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b \partial c} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)}{\partial y} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c^2} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)}{\partial z} \right] \right\}.$$

Die zwischen den beiden Kugeln bestehenden, scheinbaren Kräfte werden durch diese gleichförmige Gesamtbewegung des Systems nicht geändert werden.

Ist die Bewegung der Flüssigkeit bei ruhenden Kugeln keine gleichförmige, sondern eine periodische, so sind gleichwohl gemäss der oben aus der Arbeit von Bjerknes gezogenen Folgerung die genannten Kräfte in jedem Augenblick durch den obigen Werth von Ω bestimmt und dieser Ausdruck gestattet uns, den Mittelwerth dieser Kräfte ohne weiteres zu berechnen. In der That braucht man in dem Ausdrücke für φ an Stelle der constanten Geschwindigkeit w nur einzuführen:

$$w = w_0 \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

um den für diesen Fall der Bewegung gültigen Werth des Geschwindigkeitspotentials zu erhalten, und dementsprechend braucht man auch in Ω nur diesen Werth von w einzusetzen und den mittleren Werth für die Dauer einer Schwingung zu berechnen, um den Mittelwerth der Kräftefunction für diesen Fall zu bekommen. Also ist dieser Mittelwerth:

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} &= -\frac{\pi \mu R^3 R'^3 w_0^2}{T} \frac{\partial^2}{\partial c^2} \frac{1}{r_0} \int_0^T \cos^2 2\pi \frac{t}{T} dt \\ &= -\frac{\pi}{2} \mu R^3 R'^3 w_0^2 \frac{\partial^2}{\partial c^2} \frac{1}{r_0}.\end{aligned}$$

Ueber die Lage der X -Axe waren bisher keine Annahmen gemacht; sie werde so gelegt, dass die XZ -Ebene die Mittelpunkte der beiden Kugeln enthalte. Bezeichnen wir noch den Winkel, den die Verbindungslinie der beiden Kugeln r_0 mit der Z -Axe bildet, mit ϑ , so lassen sich die Componenten der Kraft, welche auf die erste Kugel scheinbar von der zweiten ausgeübt wird, in der Form schreiben:

$$X = \frac{\partial \Omega}{\partial a} = -\frac{3}{2} \pi \frac{\mu R^3 R'^3 w_0^2}{r_0^4} \sin \vartheta (1 - 5 \cos^2 \vartheta)$$

$$Y = \frac{\partial \Omega}{\partial b} = 0$$

$$Z = \frac{\partial \Omega}{\partial c} = -\frac{3}{2} \pi \frac{\mu R^3 R'^3 w_0^2}{r_0^4} \cos \vartheta (3 - 5 \cos^2 \vartheta).$$

Die Kraft liegt also in der durch die Bewegungsrichtung der Flüssigkeit und die Verbindungslinie der Kugelcentren gelegten Ebene und bildet mit der $+Z$ -Axe einen Winkel φ , der bestimmt ist durch:

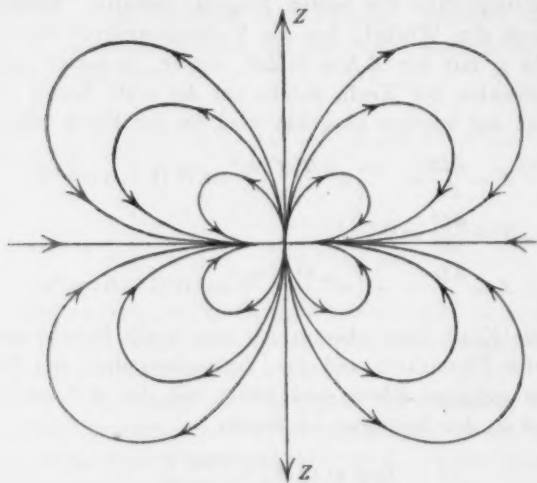
$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \vartheta \frac{1 - 5 \cos^2 \vartheta}{3 - 5 \cos^2 \vartheta}.$$

Die Kraft fällt also mit der Richtung der Verbindungslinie der beiden Kugeln nur zusammen, wenn ϑ ein Vielfaches von $\pi/2$ ist, und zwar ist in diesen Fällen die Kraft eine abstossende vom Betrage $3\pi\mu R^3 R'^3 w_0^2 / r_0^4$, wenn $\vartheta = 0$ oder π ist, d. h. die beiden Kugeln in Richtung der Bewegung hintereinander liegen, dagegen eine anziehende vom Betrage $\frac{1}{2}\pi\mu R^3 R'^3 w_0^2 / r_0^4$, wenn $\vartheta = \pi/2$ oder $3\pi/2$ ist, d. h. die Verbindungslinie der Kugelcentren senkrecht zur Schwingungsrichtung der Flüssigkeit gelegen ist. Nimmt man die Richtung der Kraft in jedem Punkte als Tangente einer Curve, so stellen diese Curven die scheinbaren Kraftlinien dar, die von der zweiten Kugel ausgehen, und auf denen sich die erste Kugel bewegen würde, wenn die zweite

ruhte. Nimmt man den Mittelpunkt dieser zweiten Kugel als Anfangspunkt der Coordinaten, so lautet die Gleichung dieser Kraftlinien in Polarcoordinaten:

$$r = C \sin \vartheta \sqrt{\cos \vartheta},$$

unter C eine willkürliche Constante verstanden. Die Form dieser Curven und die Richtung der Kraft in ihnen wird durch die beifolgende Figur veranschaulicht, in der ZZ die Richtung der Flüssigkeitsströmung bedeutet.



Andererseits wirkt auf die zweite Kugel eine scheinbar von der ersten ausgehende Kraft, welche der an der ersten Kugel angreifenden gleich und parallel, aber entgegengesetzt gerichtet ist. Könnte man sich die beiden Kugeln starr mit einander verbunden denken ohne Aenderung der Flüssigkeitsbewegung, so würden sich die beiden an ihnen angreifenden Kräfte, da sie im Allgemeinen nicht in die Richtung der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte fallen, zu einem Kräftepaar zusammensetzen, welches das System der beiden Kugeln so zu drehen suchen würde, dass die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte senkrecht zur Schwingungsrichtung der Flüssigkeit zu liegen käme. Es ist das ein besonderer Fall des allgemeinen Satzes, dass jeder Rotationskörper in einer strömen-

den Flüssigkeit sich mit seiner Längsrichtung quer gegen die Strömung zu legen sucht.¹⁾

Wie oben bereits erwähnt, gelten die gleichen Formeln und die gleichen Bemerkungen, nur unter Umkehrung des Vorzeichens der Kraft für die Wirkung zwischen zwei Magneten, und zwar Magneten von den Momenten $R^3\omega_0\sqrt{\pi\mu/2}$ und $R^3\omega^0\sqrt{\pi\mu/2}$, wenn ihre Dimensionen klein gegen ihren Abstand sind, ebenso wie in dem hydrodynamischen Problem die Kugelradien als klein gegen den Abstand der Kugeln vorausgesetzt sind. Nur fallen natürlich bei den Kugeln in der reibungslosen Flüssigkeit die Drehungsmomente fort, welche die beiden Magnete noch ausser der fortbewegenden Kraft aufeinander ausüben. Daraus folgt dann der weitere Unterschied, dass bei starrer Verbindung zweier Magnete alle Drehungsmomente sich gegenseitig aufheben, bei starrer Verbindung der beiden Kugeln dagegen das aus den fortbewegenden Kräften entstehende Drehungsmoment in der besprochenen Weise in Wirksamkeit tritt.

Dass in einer schwingenden Flüssigkeit, z. B. im Schwingungsbauche einer tönenden Luftsäule Kräfte der beschriebenen Art bestehen, lässt sich mit Hülfe eines einfachen Versuches zeigen. In eine Kundt'sche Röhre von beträchtlichem Durchmesser führe man einen steifen Draht ein, von dem aus an möglichst biegsamen Coconfäden zwei Kork- oder Hollundermarkkugeln bis in die Mitte der Röhre herabhängen. Man muss dafür Sorge tragen, dass die Kugeln möglichst nahe bei einander hängen, ohne sich jedoch zu berühren. Schiebt man den Draht so weit hinein, dass die Kugeln an einer Stelle sich befinden, an der beim Tönen ein Schwingungsbauch entsteht, so sieht man beim Erregen der Schwingung deutlich, dass sich die Kugeln abstossen, wenn die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte der Röhrenaxe parallel liegt, dass sie sich dagegen anziehen, wenn diese Linie senkrecht zur Röhrenaxe gerichtet ist.

Befinden sich statt zweier viele Kugeln in einer solchen schwingenden Flüssigkeit, so werden die auf sie wirkenden

1) Thomson u. Tait, Theoretische Physik, deutsch. Braunschweig 1871. 1. Theil. p. 303.

Kräfte in erster Annäherung als die Resultanten der Kräfte der besprochenen Art angesehen werden können, welche zwischen je zweien dieser Kugeln bestehen. Dabei ist der indirecte Einfluss vernachlässigt, den eine Kugel auf eine zweite dadurch ausüben wird, dass sie die Wirkung einer dritten Kugel auf die zweite verändert.¹⁾ Infolge dieser Kräfte werden sich die Kugeln in bestimmter Weise gruppieren, ähnlich wie man es bei den vielen kleinen Magneten wahrnimmt, die man erhält, wenn man Eisenfeilspähne in ein magnetisches Feld bringt. Aber wegen des entgegengesetzten Vorzeichens der Kraft in den beiden Fällen muss auch die Anordnung der Kugeln und der Magnete einen charakteristischen Gegensatz zeigen. Die magnetisch gewordenen Eisenstückchen ziehen sich in der Richtung der magnetisirenden Kraftlinien an und stossen sich in allen dazu senkrechten Richtungen ab. Sie reihen sich daher hintereinander zu Curven, welche den Kraftlinien folgen und sich senkrecht zu diesen wegen der Abstossung in dieser Richtung deutlich voneinander sondern und in gewissen Entfernungen halten. Besser als in der gewöhnlichen Art durch Bestreuen eines Papierees mit Eisenfeile nimmt man diese Erscheinungen wahr, wenn man Eisenfeile in einer zähen Flüssigkeit vertheilt und diese in das Magnetfeld bringt. Umgekehrt ziehen sich die Kugeln in der schwingenden Flüssigkeit in allen zur Strömungsrichtung senkrechten Richtungen an und stossen sich in der ihr parallelen Richtung ab. Sie müssen daher das Bestreben haben, sich in Flächen aneinander zu reihen, welche auf der Strömungsrichtung senkrecht stehen, und welche sich wegen der Abstossung in der Richtung ihrer Normalen deutlich voneinander absondern werden. Da die Kraft mit der vierten Potenz der Entfernung abnimmt, so wird die abstossende Wirkung beim Auseinanderrücken der Kugeln schnell an Intensität verlieren. Es verdient aber hervorgehoben zu werden, dass, wie aus den Ausdrücken für die Componenten X und Z hervorgeht, die Kraft, wenn die Kugeln oder die Magnete in der Richtung der Z -Axe hintereinander liegen, doppelt so gross ist, als wenn sie in der Richtung der X -Axe

1) Pearson, Quarterly Journal 20. p. 60. 1885.

nebeneinander liegen. Also ist unter sonst gleichen Umständen in dem hydrodynamischen Probleme die Abstossung in der Richtung der *Z*-Axe doppelt so gross wie in dem magnetischen Probleme die Abstossung senkrecht zur *Z*-Axe, und man wird daher erwarten können, dass bei den Kugeln in der Flüssigkeit die Sonderung der Flächen voneinander noch deutlicher hervortritt, als die Sonderung der Curven bei den Feilspähnen im Magnetfelde.

Eine Gruppierung der hier beschriebenen Art ist gerade dasjenige, was für die Kundt'schen Staubfiguren so besonders charakteristisch ist. Denn die bekannten und vielbesprochenen Rippen oder Querwände, die der Staub im Schwingungsbauche einer Kundt'schen Röhre bildet, sind nichts anderes als Anordnungen des Staubes in Flächen, die auf der Schwingungsrichtung senkrecht stehen. Die Uebereinstimmung dieser Erscheinung mit den aus unseren theoretischen Betrachtungen gezogenen Folgerungen ist eine so augenscheinliche, dass sich hierin die denkbar einfachste und natürlichste Erklärung für die bisher noch immer als etwas räthselhaft angesehene Rippenbildung darzubieten scheint. Auch die Thatsache, dass diese Rippen im Schwingungsbauche am stärksten ausgebildet sind und nach den Knoten zu schwächer werden und enger aneinander rücken, stimmt mit dieser Auffassung ihrer Ursache überein; denn die wirkenden Kräfte hängen von dem Quadrat der Geschwindigkeit der Luftbewegung ab, und diese ist im Bauch am grössten, im Knoten Null. Dabei mag es übrigens dahingestellt bleiben, ob der Abstand zweier Rippen als Maass der Entfernung angesehen werden muss, in welcher die Kräfte bereits zu schwach sind, um noch eine Weiterbewegung des Staubes zu veranlassen. Denn es wirken auf jede Querwand von beiden Seiten abstossende Kräfte, und für die stabile Lage einer solchen Wand wäre offenbar die Bedingung ausreichend, dass die Differenz beider Kräfte klein genug ist, um nicht mehr wirksam zu sein. Dass sich dabei die Rippen sehr gleichmässig und in regelmässigen Abständen ausbilden müssen, dürfte aus dieser Art der Zusammenwirkung der Kräfte ebenfalls ohne Schwierigkeit ersichtlich sein. Wenn man sie übrigens durch wiederholtes

leises Anstreichen des tonerzeugenden Stabes allmählich entstehen lässt, wobei sich zuerst kleinere Rippen bilden, die sich dann zu grösseren vereinigen, so bemerkt man auch in den zufälligen Unregelmässigkeiten, wie sie bei derartiger schwächerer Wirkung deutlicher hervortreten, eine so vollkommene Analogie mit der Art der allmählichen Ausbildung der magnetischen Curven bei leiser Erschütterung der das Eisenpulver tragenden Membran, dass die Vorstellung eines in beiden Fällen gleichartigen Spieles von Kräften sehr nahe gelegt wird.

Mit dieser Auffassung steht die Bedeutung, welche der Beschaffenheit des Pulvers für die Ausbildung der Figuren zukommt, durchaus im Einklang. Ist das Pulver so fein, dass es in der Flüssigkeit schwebt, wie Rauch oder Salmiaknebel, so erhält man keine rippen- oder wandförmigen Anordnungen der Theilchen, einerseits weil in diesem Falle die Theilchen nach den Ergebnissen des ersten Abschnittes die Bewegung der Flüssigkeit fast vollständig mitmachen werden und die beschriebenen hydrodynamischen Kräfte sich daher gar nicht entwickeln können, andererseits weil, selbst wenn diese Kräfte auch hier vorhanden wären, die Reibung ihrer Wirksamkeit ebenso hinderlich sein würde, wie der der Schwerkraft. Ausserdem schwächt eine derartige Vertheilung fester Körperchen in der Luft von vornherein die Intensität der Luftschwingungen ausserordentlich ab, wie Dvořák¹⁾ an mit Salmiaknebeln gefüllten Resonanzröhren beobachtet hat. Ist das Pulver gröber, aber specifisch schwer, so lagert es zu dicht und fest auf dem Boden, als dass die Luftschwingungen zwischen seinen Theilchen sich kräftig genug entwickeln könnten, oder ist überhaupt zu schwer, um von den immerhin schwachen hydrodynamischen Kräften bewegt zu werden. Daher müssen die Versuche mit einem nicht zu feinen, specifisch leichten, lockeren Pulver, wie Korkfeilicht oder Kieselsäure am besten gelingen. Doch wird auch hier eine zu grosse Menge des Pulvers die Luftbewegung erheblich schwächen und dadurch die Ausbildung der Figuren beeinträchtigen.

1) Dvořák, Pogg. Ann. 157. p. 60. 1876.

Es könnten aber vielleicht einige Einwände gegen diese Erklärungsweise der Rippenbildung erhoben werden, denen ich von vornherein begegnen möchte. Man könnte erstens bemerken, dass die entwickelten Formeln auf der Voraussetzung der Kleinheit der Radien im Verhältniss zu den Abständen der Kugeln beruhen, während sie angewandt werden auf Theilchen, die einander sehr nahe liegen und sich unter der Wirkung dieser Kräfte theilweise bis zur Berührung nähern. Hiergegen wäre auf die ganz directen, hydrodynamischen Versuche hinzuweisen, durch welche Bjerknes und Schiötz die Folgerungen der Theorie geprüft und qualitativ durchaus bestätigt gefunden haben, obwohl auch bei diesen Versuchen jene Bedingung der Theorie keineswegs erfüllt war. Daraus kann man wohl schliessen, dass der Charakter unserer Kräfte bei Nichterfüllung jener Bedingung zum mindesten nicht wesentlich geändert sein kann. Eine andere Schwierigkeit könnte darin erblickt werden, dass die innere Reibung der Flüssigkeit vernachlässigt worden ist. Ueber den Einfluss dieser auf die Luftbewegung in einer Kundt'schen Röhre hat Lord Rayleigh¹⁾ eine Berechnung angestellt und mit deren Hülfe die Entstehung der eigenthümlichen Strömungen erklärt, welche Hr. Dvořák²⁾ in solchen Röhren beobachtet hatte. Diese Strömungen stellen einen Luftaustausch zwischen Bauch und Knoten dar in Form eines Wirbelringes; die Bewegung ist an der Wand vom Bauch zum Knoten gerichtet, entfernt sich im Knoten von der Wand nach dem Röhreninneren zu, kehrt im inneren Theile der Röhre nach dem Bauch zurück und ist im Bauch wieder von dem Inneren nach der Wand zu gerichtet. Hr. Rayleigh bemerkt in der Einleitung seines Aufsatzes, dass diese Luftströmungen als die „augenscheinliche Ursache der Bildung der Staubfiguren“ anzusehen wären, beschreibt aber nicht näher, wie dieser Vorgang zu denken wäre. Ich muss gestehen, dass ich mir kein Bild von dem Zusammenhange machen kann, der zwischen dieser, der eigentlichen Schwingungsbewegung der Luft gegenüber verhältnissmässig schwachen Strömung und der Entstehung der hohen Querwände

1) Lord Rayleigh, Phil. Trans. 175. p. 1. 1884.

2) Dvořák, Pogg. Ann. 157. p. 61. 1876.

der Kundt'schen Staubfiguren bestehen könnte. Auch die anderen bisher aufgestellten Erklärungen der Rippenbildung, welche eine genauere Vorstellung von der Art ihres Entstehens zu geben versuchten, gehen in erster Linie auf die Wirkung der Reibung zurück, abgesehen von dem Erklärungsversuche Bourget's¹⁾, welcher Obertöne zu Hülfe nimmt. Denn sowohl Hr. Dvořák²⁾ als auch Hr. Stefan³⁾ und ebenso die Herren Schellbach und Böhm⁴⁾ sehen als die eigentliche Ursache für die Bewegung des Staubes die directe fortführende Wirkung an, welche die Flüssigkeitsbewegung auf jedes einzelne Theilchen des Staubes ausübt; die leichteren Theile sollen mitgenommen werden und an den compacteren in Ruhe gebliebenen sich verfangen und hängen bleiben. Diese Auffassung überträgt auf die akustischen Staubfiguren das, was man an langsameren, gröberen Flüssigkeitsbewegungen beobachtet hat. Wenn Wasser über einer ebenen, mit Sand bestreuten oder aus Sand bestehenden Unterlage in eine oscillatorische Bewegung versetzt wird, so gruppirt sich auch der Sand in langgestreckten Linien oder häuft sich zu flachen wellenartigen Rippen an, die stets senkrecht zur Bewegungsrichtung des Wassers verlaufen, und die gleiche Oberflächengestaltung erzeugt der Wind über einer trockenen Sandfläche. Dem Geologen sind diese Gebilde als Wellenspurten oder Rippelmarken bekannt⁵⁾, und die experimentelle Untersuchung über ihre Entstehung, die wir Hrn. G. H. Darwin⁶⁾ verdanken, hat gezeigt, dass sie in erster Linie durch die mitführende Wirkung der Wasserbewegung hervorgebracht werden, dass aber ferner zugleich mit den Rippen auf und zwischen ihnen eigenthümliche Wirbelbewegungen der Flüssigkeit entstehen, welche die weitere Ausbildung und den Bestand der Rippen unterstützen. Ob man aber wegen dieser Analogie berechtigt ist, den gleichen

1) Vgl. Neesen, Wied. Ann. 30. p. 432. 1887.

2) Dvořák, Pogg. Ann. 151. p. 634. 1874.

3) Stefan, Wien. Ber. 65. p. 424. 1872.

4) Schellbach u. Böhm, Wied. Ann. 7. p. 1. 1879.

5) Vgl. Walther, Abhdlg. der math.-phys. Klasse der sächs. Ges. d. Wiss. 16. p. 523. 1890.

6) G. H. Darwin, Proc. Roy. Soc. London. 36. p. 18. 1884.

Vorgang der Entstehung auch bei den akustischen Staubfiguren anzunehmen, das erscheint mir mindestens sehr zweifelhaft. Denn gerade in den wichtigsten Punkten weichen die Verhältnisse bei den beiden Gruppen von Erscheinungen am meisten voneinander ab. Bei den Sandrippen ist der Unterschied der specifischen Gewichte der Flüssigkeit und des festen Körpers relativ gering, die Bewegungen der Flüssigkeit sind langsam und von grosser Periode. Bei den Kundt'schen Staubfiguren dagegen hat man eine grosse Verschiedenheit der specifischen Gewichte und sehr schnelle Schwingungen von erheblicher Intensität. Unter diesen Umständen muss nach den Ergebnissen des ersten Abschnittes unserer Betrachtungen die fortführende Wirkung der Flüssigkeitsbewegung im ersten Falle thatsächlich sehr gross, im zweiten dagegen ausserordentlich gering sein. In dem Maasse aber, als infolge der Abnahme der Schwingungsdauer die Reibungswirkungen mehr und mehr zurücktreten, werden die Wirkungen der rein hydrodynamischen Kräfte, welche von den Quadraten der Geschwindigkeit abhängen, mehr und mehr zur Geltung kommen müssen. Dass diese letzteren die Oberhand über die ersteren gewinnen, kann sogar bei fortschreitender, nicht periodischer Bewegung eintreten, wie ein interessantes Experiment beweist, welches Hr. v. Helmholtz beschrieben hat.¹⁾ Eine Kugel, welche in einem verticalen, mit Wasser gefüllten Rohre herabfällt, hat bei langsamem Sinken stets das Bestreben, sich nach der Mitte des Rohres zu begeben, während sie bei schnellem Fallen mehrmals gegen die Wand der Röhre anschlägt. Die erstere Erscheinung ist eine Wirkung der Reibung, die letztere eine Wirkung der oben besprochenen hydrodynamischen Kräfte; denn die Flüssigkeitsbewegung ist im zweiten Falle eine solche, dass die Kugel gewissermaassen von ihrem neben und mit ihr zugleich herabfallenden Spiegelbilde angezogen wird und infolgedessen sich der Wand bis zur Berührung nähert. So wie in diesem Beispiele die Reibung infolge der vermehrten Geschwindigkeit hinter dem Einflusse der hydrodynamischen Kräfte zurücktritt, so wird dasselbe bei den akustischen

1) H. v. Helmholtz, Wissenschaftl. Abhdlg. 1. p. 223.
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XLII.

Schwingungen gegenüber den größeren Schwingungen einer ganzen Flüssigkeitsmasse wegen der Verkürzung der Periode eintreten, und gerade hierin scheint es mir begründet zu sein, warum gewisse hydrodynamische Wirkungen bei akustischen Schwingungen so besonders deutlich hervortreten. — Es sei endlich darauf hingewiesen, dass auch die Form der Kundt'schen Staubrippen mit jenen der erwähnten Sandrippen doch keine so unbedingte Aehnlichkeit besitzt. Denn die Sandrippen sind flach ansteigende, schwach gewölbte Hügel, die Rippen der akustischen Staubfiguren dagegen steile, hohe, dünne Querwände. Auch hierin scheint sich mir der verschiedene Charakter der vorherrschenden Kräfte auszudrücken, und wenn mit diesen Ueberlegungen die Möglichkeit des Einflusses der Reibung auf die Entstehung dieser Figuren auch nicht vollkommen abgeleugnet werden soll, wenn auch zugegeben werden kann, dass vielleicht gerade für die anfängliche Lockerung und Aufwirbelung des Staubes die Reibungswirkungen in Betracht zu ziehen sind, so glaube ich doch die charakteristische Form der Kundt'schen Staubfiguren in erster Linie den hydrodynamischen Kräften der behandelten Art zuschreiben zu dürfen.

Es erübrigt schliesslich an einem numerischen Beispiel den Nachweis zu führen, dass diese Kräfte gross genug sein können, um die verlangten Bewegungen des Staubes zu bewirken. Nehmen wir, wie im ersten Abschnitt, Korkkugeln von 0,02 cm Radius an. Ihre Mittelpunkte sollen sich in 1 mm Abstand ($r_0 = 0,1$ cm) von einander befinden, und die Verbindungslinie dieser Centren soll senkrecht gegen die Schwingungsrichtung der Luft gelegen sein. Dann besteht zwischen den beiden Kugeln eine anziehende Kraft von der Grösse:

$$\frac{3}{2} \pi \mu \frac{R^2 R'^2 w_0^2}{r_0^4}.$$

Fragen wir, wie gross das Verhältniss dieser Wirkung F zur Wirkung G der Schwerkraft auf die Kugeln ist, wenn die Schwingungszahl des Tones 2000 beträgt und die Amplitude mit a bezeichnet wird. Zwischen dieser letzteren und der Maximalgeschwindigkeit besteht die Beziehung $w_0 = a 2 \pi / T$. Die Wirkung der Schwerkraft ist:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 (\mu' - \mu) g,$$

unter μ' die Dichte der Substanz der Kugeln (0,2) unter g die Beschleunigung durch die Schwere verstanden (981 cm/sec²).

Dann ist:

$$\frac{F}{G} = \frac{9}{2} \frac{\mu}{(\mu' - \mu)} \frac{\pi^2 R'^3}{T^2 r_0^4 g} \cdot a^2$$

$$= 44 a^2, \text{ oder } = 0,44 a^2,$$

wenn a in Millimetern ausgedrückt wird. Die hydrodynamische Wirkung in diesem Falle würde also derjenigen der Schwerkraft gleich sein für eine Amplitude von ungefähr 1,5 mm. Dieser Werth dürfte für die kurzen Wellen, die hier vorausgesetzt sind, zu gross sein; aber man kann die Amplitude erheblich kleiner annehmen, und man wird unter Berücksichtigung der starken Abhängigkeit der hydrodynamischen Kräfte an der Entfernung immer noch Wirkungen erhalten, die gross genug wären, um die beobachteten Bewegungen des Staubes hervorzubringen.

Phys. Inst. der Univ. Leipzig, Februar 1891.

IV. *Notiz über eine neue Form der Apparate zur Demonstration der lichtelectrischen Entladung durch Tageslicht;*
von J. Elster und H. Geitel.

Unlängst haben wir in diesen Annalen¹⁾ Apparate beschrieben, welche die lichtelectrische Entladung in zerstreutem Tageslichte zeigen, auch wenn dies durch Glas hindurch gegangen ist, und zwar nicht nur bei Verwendung statischer Ladungen, sondern selbst wenn die lichtempfindliche Electrode dauernd mit dem negativen Pole einer trockenen Säule von grossem inneren Widerstande in leitender Verbindung steht. Die Art der Herstellung brachte es mit sich, dass sich an den von der Quecksilberluftpumpe abgeschmolzenen Recipienten Glasrohransätze von mehreren Centimetern Länge befanden, in welche, da der Apparat bis auf wenige Hundertel Millimeter Quecksilberdruck evacuirt ist, das Natriumamalgam leicht mit Heftigkeit unter Beschädigung der Abschmelzstellen hineinstürzt. Ihre Handhabung erforderte daher die grösste Vorsicht.

Wir haben uns deshalb bemüht, Recipienten herzustellen, welche von diesem Uebelstande frei sind.

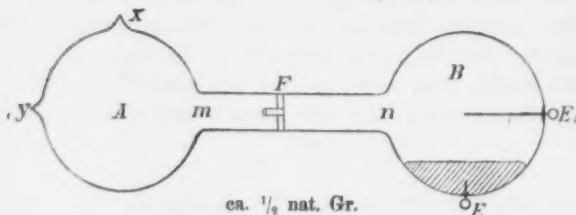


Fig. 1.

Fig. 1 stellt die neue Form dieser lichtelectrischen Recipienten dar. In der mit einem undurchsichtigen Lack über-

1) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. 41. p. 161. 1890.

zogenen Kugel *A* befindet sich, wenn der Apparat nicht gebraucht wird, eine Quantität flüssigen Natriumamalgams, das durch Neigen, indem es die Filtrirvorrichtung *F* passirt, jederzeit leicht in die Kugel *B* hinüberschafft werden kann. Das Zwischenstück *MN* ist mit Schellackfirniß überzogen, ebenso die unmittelbare Umgebung der eingeschmolzenen Platinelectroden *E* und *E*₁. Man kann so den Apparat gut isolirt aufstellen, indem man *MN* in einem Halter festklemmt. Etwaige Fehler in der Isolation sind durch oberflächliches Erwärmen des Schellacküberzuges leicht zu beseitigen.

Wie man aus der Figur ersieht, sind Ansätze irgend nennenswerther Grösse vermieden worden: Es ist *x* die Schmelzstelle, an welcher das Rohr sass, durch das der Recipient mit Natriumamalgam beschickt wurde, *y* die Stelle, an welcher der Apparat von der Quecksilberluftpumpe abgeschmolzen wurde.

Die electrische Ladung der lichtempfindlichen Amalgamfläche bewirken wir durch eine Zamboni'sche Säule folgender Construction.

Auf einen dünn mit Schellackfirniß überzogenen Ebonitstab *AB* (Fig. 2) von 23 cm Länge und 0,5 cm Dicke sind zwei Metallfassungen aufgekittet. Die untere trägt die vernickelte, mit ihr fest verbundene Platte *P*, während in die obere ein Gewinde *G* eingeschnitten ist. Die Platte *P*₁ ist mittelst der Hülse *M* auf *G* aufschraubbar und kann innerhalb gewisser Grenzen der Platte *P* genähert werden. Die aus unächtem Gold- und Silberpapier in bekannter Weise

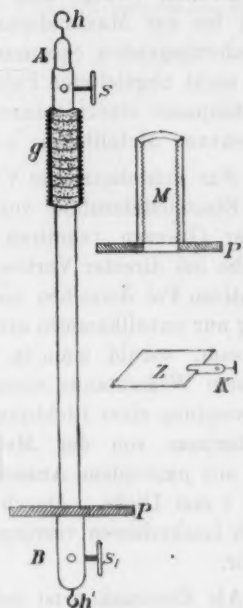


Fig. 2.

zusammengesetzten quadratischen Plattenpaare von je 16 qcm Oberfläche sind in der Mitte durchlocht und werden auf den Ebonitstab aufgereiht und durch Herabschrauben der Platte P_1 zusammengepresst. Die Schraubchen s und s_1 dienen zum Befestigen der Leitungsdrähte, die Haken h und h_1 zum Anhängen der Säule an ein passendes Stativ. Die nach diesem Princip construirte Säule von 1080 Plattenpaaren zeigt neu an den Polen eine Spannung von ca. 320 Volt.

Die Vortheile dieser Construction gegenüber der sonst üblichen bestehen einmal in dem Fehlen jeder Glasumhüllung; diese ist stets hygroskopisch und drückt so namentlich bei hohem Dampfgehalt der Luft die freie Spannung an den Polen der Säule erheblich herunter.

Sodann verfügt man über electricische Spannungen von Null bis zur Maximalspannung der Säule. Will man mit zwischenliegenden Spannungen arbeiten, so verbindet man den nicht abgeleiteten Poldraht mit dem direct zwischen die Plattenpaare einschiebbaren und mit Klemmschraubchen K versehenen Metallbleche z .

Für lichtelectricische Versuche ist es ferner von Vortheil, die Electricitätszufuhr von Seiten der Säule innerhalb gewisser Grenzen reguliren zu können. Manche Apparate, welche bei directer Verbindung der Amalgamfläche mit dem negativen Pol derselben im Tageslicht die fragliche Erscheinung nur unvollkommen erkennen lassen, erweisen sich sofort wirksam, sobald man in die Zuleitung einen Leiter von grossem Widerstande einschaltet. Man trenne deshalb bei Verwendung einer Lichtquelle geringer Intensität das oberste Plattenpaar von der Metallscheibe P_1 durch zwei oder drei mit passendem Ausschnitt versehene Pappscheiben von etwa 1 mm Dicke. Durch Anziehen der Schraube steigert, durch Lockerlassen verringert man alsdann die Electricitätszufuhr.

Als Electroskop ist jedes beliebige Goldblattelektroskop verwendbar; entschiedenem Vorzug verdient das von F. Exner construirte transportable Aluminiumblattelektroskop; und zwar eignet sich zu den Versuchen besonders ein nach dem gleichen Princip construirtes, in etwa den anderthalbfachen Di-

mensionen ausgeführtes Instrument. Mit diesen Apparaten¹⁾ lassen sich folgende Erscheinungen zeigen:

- 1) die l. c. beschriebene lichtelectrische Entladung durch Sonnen- und Tageslicht;
- 2) die Hemmung dieser Entladung im magnetischen Felde.²⁾

Bei Anstellung des letzten Versuches orientirt man den Apparat zwischen den Schenkeln eines Electromagneten zweckmässig so, dass E_1 , vgl. Fig. 1, senkrecht zur Verbindungslinie der Pole steht. Die Intensität des verwandten Lichtes ist so lange durch theilweises Schliessen der Fensterladen abzdämpfen, bis die Erscheinung deutlich hervortritt.

Wolfenbüttel, im Januar 1891.

1) Dieselben fertigte Louis Müller-Unkel, Glastechniker, Braunschweig.

2) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. 41. p. 166. 1890.

V. *Einfluss der Temperatur und des Aggregatzustandes auf das Verhalten des Wismuths im Magnetfelde;*

von P. Drude und W. Nernst.

(Aus den Gött. Nachr. Nr. 14 1890; mitgetheilt von den Herren Verf.)

In den letzten Jahren ist eine Anzahl eigenthümlicher Erscheinungen aufgefunden worden, welche in aus metallisch leitendem Materiale gefertigten Platten auftreten, wenn dieselben sich senkrecht zu den Kraftlinien eines magnetischen Feldes befinden und entweder von einem galvanischen oder von einem Wärmestrome durchflossen werden. Es sind dies die von Hall entdeckte Drehung der Aequipotentiallinien eines galvanischen Stromes, die von Righi zuerst beobachtete Widerstandszunahme (Hall'scher Longitudinaleffect); ferner die thermomagnetischen Transversal- und Longitudinaleffecte, welche in von einem Wärmestrome durchflossenen Platten auftreten (von Ettingshausen und Nernst), sowie die Umkehrungen derselben, nämlich der galvanomagnetische Transversaleffect (von Ettingshausen) und der galvanomagnetische Longitudinaleffect (Nernst), welche wiederum in von einem galvanischen Strome durchflossenen Platten beobachtet werden.

Das Interesse, welches den soeben aufgeführten Phänomenen an sich dargebracht werden muss, weil sie einer neuen Wechselwirkung zwischen den magnetischen und electrischen Kräften, sowie der strömenden Wärme ihre Entstehung verdanken, wird noch erhöht dadurch, dass sie allen Anzeichen nach einst eine gewisse Bedeutung erlangen werden, wenn es sich um die Lösung der Frage nach der Natur der galvanischen Stromleitung in den Metallen handelt. So haben wir es denn unternommen, zu dem experimentellen Studium dieser Phänomene einen Beitrag nach einer Seite hin zu bringen, welche bisher nur ganz vereinzelt gestreift wurde, nämlich zu der Frage, wie dieselben, speciell beim

Wismuth, von der Temperatur und dem Aggregatzustande beeinflusst werden, und zwar wählten wir unter ihnen die beiden zuerst aufgezählten, weil der Untersuchung der übrigen in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur nicht unbedeutende Schwierigkeiten im Wege stehen.

Der Electromagnet, dessen wir uns bei unseren Versuchen bedienten, besitzt aufrechtstehende Schenkel, auf denen zwei Polschuhe horizontal verschoben werden können; derselbe ist nach den Angaben von Hrn. Prof. Riecke gebaut und hat einige Aehnlichkeit mit dem grossen Electromagnet der Berliner Academie.¹⁾ Der magnetisirende Strom wurde von einer Dynamomaschine geliefert und schwankte bei unseren sämtlichen Versuchen nur wenig um den Mittelwerth 10 Ampère; die Intensität des magnetischen Feldes, welche dieser Stromstärke und dem bei unseren Versuchen ebenfalls constant erhaltenen Abstände der beiden Polschuhe (Länge 20 cm, Breite und Dicke 4 cm) entsprach, betrug etwa 7000 cgs, wie wir aus der Grösse des Halleffectes und der Widerstandszunahme des Wismuths schätzten.

Das Galvanometer, an dem der Halleffect und die Widerstandszunahme gemessen wurde, war eines der bekannten Wiedemann'schen Form; es besitzt zwei dickdrähtige Rollen von zusammen etwa 2 S.-E. Widerstand und war durch Astasirung auf genügende Empfindlichkeit gebracht. Es befand sich ausserdem in hinreichendem Abstände vom Electromagnet, um nicht von der directen Fernwirkung desselben in störender Weise beeinflusst zu werden.

Bei messenden Versuchen ist es natürlich unbedingt erforderlich, die zu untersuchenden Platten auf constanter Temperatur zu erhalten, damit nicht durch Thermoströme und durch die Beeinflussung, welche diese und die in der Platte verlaufenden Wärmeströmungen durch den Magnetismus erfahren, die Beobachtung der betreffenden Wirkungen unmöglich gemacht oder wenigstens sehr gestört würde. Wir erzielten die gewünschten hohen Temperaturen durch Dampfbäder, in welche die Platten direct eintauchten; als Heiz-

1) Man sehe die Zeichnung bei Quincke, Wied. Ann. 24. p. 359. 1885.

flüssigkeiten verwendeten wir Wasser (Siedepunkt 100°) Benzoesäureamylester (254°) und Diphenylamin (310°).

Der Erhitzungsapparat musste in Hinblick darauf construirt werden, dass der zur Verfügung stehende Raum bei der geringen Ausdehnung, welche man einem magnetischen Felde geben darf, wenn man nicht auf Homogenität und Stärke verzichten will, ein sehr beschränkter ist. Wir haben schliesslich den beistehend (Fig. 1) abgebildeten Apparat als in jeder Hinsicht zweckmässig gefunden; derselbe besteht aus einem

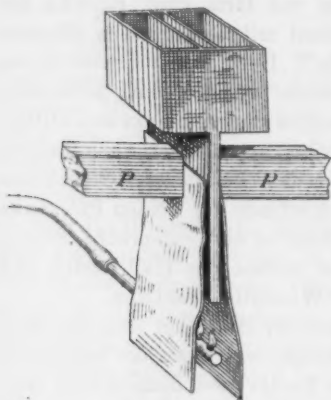


Fig. 1.

7 cm breiten, 23 cm hohen und 1 cm dicken Kasten, welcher aus 0,8 mm dickem Messingblech gefertigt und in allen seinen Theilen hart gelöthet war. Der Kasten wurde zwischen die Polschuhe *PP* des Electromagnets fest eingeklemmt (cf. Fig. 1), an der directen Berührung jedoch durch Asbestpappe gehindert. Um ein Entweichen der siedenden

Dämpfe zu verhüten, waren an sein oberes Ende zwei Messingkästen angelöthet, welche mit Wasser gefüllt nach Art eines Rückflusskühlers in so vollständiger Weise wirkten, dass ein Verschluss des mittleren Kastens überflüssig war. ein Umstand, welcher der bequemen Einführung der zu untersuchenden Platten in hohem Grade förderlich war. In die unmittelbare Nähe der Platten wurde stets die Quecksilberkugel eines Thermometers gebracht. Um einerseits eine intensive Erwärmung des Kastens zu erzielen, andererseits aber die Rollen des Electromagnets, welche für die Anbringung der Heizflammen nur einen sehr beschränkten Raum übrig liessen, nicht der Gefahr des Verbrennens aussetzen, construirt wir aus einem einseitig geschlossenen und seitwärts mit fünf Löchern versehenen Messingrohre einen Brenner, der mit einem Gemisch von Leuchtgas und

Luft gespeist wurde; letzteres wurde dadurch erzeugt, dass ein vor den Brenner geschaltetes T-Rohr mit der Gasleitung und mit einem Wassergebläse communicirte. Diese Vorrichtung gefährdete die Umspinnung der Rollen, welche durch Messingbleche vor directer Strahlung geschützt wurden, nicht im geringsten und lieferte zugleich Wärme genug, um auch die hochsiedenden Flüssigkeiten nach wenigen Minuten in heftiges Kochen zu bringen.

Das bei den nachstehend beschriebenen Versuchen benutzte Wismuth schmolz bei 267° und war jedenfalls sehr rein; es ist gleicher Herkunft wie dasjenige, welches das Material zu Platte Nr. II lieferte, die früher¹⁾ bezüglich der Hall'schen Wirkung eingehend untersucht worden ist, und hat auch sonst mehrfach zu ähnlichen Versuchen gedient.

Hallphänomen im Wismuth. Eine quadratförmige, 0,5 cm dicke Wismuthplatte war mit vier an den Mitten ihrer Seiten eingeschmolzenen Kupferdrähten versehen, von denen alternirend zwei zu einem Bunsenelemente, welches den Primärstrom lieferte, und zwei zum Galvanometer führten, an dem der Transversaleffect beobachtet wurde. Indem so die Anwendung von Loth vermieden war, konnte die Platte bis auf dem Schmelzpunkt nahe Temperaturen erhitzt werden, ohne dass die Zuleitungen, welche gleichzeitig der Platte als Träger dienten, sich lösten. Als die letztere in der unten stehenden Reihenfolge auf die Temperaturen t gebracht wurde, beobachteten wir folgende, auf gleichen Primärstrom bezogene electromotorische Kräfte e des Hall'schen Stromes; diejenige bei der Anfangstemperatur gleich eins gesetzt.

t	20°	254°	23°
e	1,000	0,418	1,005.

Da nach obigen Zahlen der Halleffect kurz vor dem Schmelzpunkte, wenn auch erheblich schwächer wie bei gewöhnlicher Temperatur, doch immerhin in mit anderen Metallen verglichen von grosser Stärke zu constatiren war, so erschien der Versuch, denselben auch in flüssigem Wismuth zu unter-

1) von Ettingshausen u. Nernst, Wien. Ber. 94. p. 592. 1886.
Vgl. auch Nernst, Wied. Ann. 31. p. 772. 1887.

suchen, besonders verlockend, weil man aus dessen Verhalten am ehesten zu schliessen geneigt sein wird, ob das Hall'sche Phänomen vorwiegend an den krystallinischen Zustand gebunden ist oder nicht. Der diesbezügliche Versuch ergab, dass bei der zur Verwendung gelangten Probe von geschmolzenem Wismuth das Hall'sche Drehungsver-

mögen, wenn überhaupt messbar, so doch sicherlich weniger wie $\frac{1}{100}$, wahrscheinlich weniger wie $\frac{1}{1000}$ von dem bei Zimmertemperatur beobachteten Werthe beträgt.

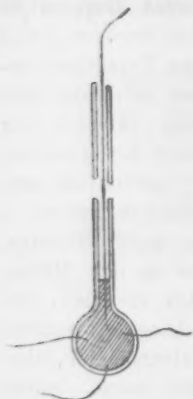


Fig. 2.

Die Untersuchung des geschmolzenen Wismuths gelang in einer unten zugeschmolzenen, aufgeblasenen und hierauf platt gedrückten Glasröhre, welche mit drei eingeschmolzenen Platindrähten versehen war (cf. Fig. 2). Die vierte Zuleitung geschah mittelst eines von oben eingeführten Platindrahtes. Das Rohr wurde leer in den Dampf des siedenden Diphenylamins gebracht, hierauf mit Wismuth beschickt, indem dieses in

kleinen Stückchen durch das 0,5 cm weite Glasrohr hineingeworfen wurde, und sodann unter den gleichen Bedingungen wie die erste Platte untersucht. Mit Commutiren des magnetisirenden Stromes trat allerdings eine deutliche Ablenkung auf, die jedoch mit der Richtung des Primärstromes nicht die eigene wechselte, also keinesfalls von einer Hall'schen Wirkung herrührte. Worauf dieselbe beruht, müssen wir vorläufig dahingestellt sein lassen; sie verschwand, als man den Primärstrom öffnete, schien jedoch im übrigen mehr secundären Ursprungs zu sein. Aller Wahrscheinlichkeit nach ist sie an den flüssigen Zustand gebunden, wie daraus geschlossen werden kann, dass eine ähnliche Wirkung und zwar etwa gleich stark auch dann auftrat, als der Apparat mit Quecksilber anstatt mit flüssigem Wismuth beschickt war (s. unten), und dass sie verschwand, sowie das Wismuth erstarrte.

Unmittelbar nachdem das Wismuth fest geworden und

bis auf 50° abgekühlt war, wobei wider Erwarten das Glasgefäss von dem beim Erstarren sich ausdehnenden Wismuth nicht gesprengt wurde, konnten wir den Halleffect in einer der Dicke der Platte entsprechenden Grösse beobachten; bei weiterer Abkühlung bis auf 15° wurde er um etwa 2 Proc. kleiner.

Mit der unveränderten Platte stellten wir hierauf, um uns über die Abhängigkeit des Transversaleffectes von der Temperatur bis in die Nähe des Schmelzpunktes zu orientiren, folgende Messungen an:

t	14°	243°	100°	14°
e	1,00	0,23	1,23	1,16.

Das Wismuth kehrte beim Abkühlen somit nicht ganz in den früheren Zustand zurück, eine bei der vielfach beobachteten Abhängigkeit des Transversaleffectes von der Behandlung, welche man dem Metall hat angedeihen lassen, nicht unerwartete Erscheinung. Auch dieser Versuch zeigt, dass das Hall'sche Drehungsvermögen beim Abkühlen von 100 auf 14° abnimmt, was mit einer älteren Beobachtung in Uebereinstimmung sich befindet¹⁾; die Abnahme desselben bei höherer Temperatur ist hier nicht unerheblich grösser wie bei der ersten Platte. Jedenfalls ist aber die Abnahme in dem Intervall von 243 bis 310° , in welches die Verflüssigung des Wismuths fällt, eine ausserordentlich viel stärkere, wie in dem ganzen übrigen untersuchten.

Widerstandszunahme des Wismuths im Magnetfelde. Wie bekannt²⁾ übt der Magnetismus ausser dem Halleffect noch eine zweite Wirkung auf ein von einem galvanischen Strome senkrecht zu den Kraftlinien des Feldes durchflossene Wismuthplatte aus, welche gewöhnlich als Widerstandsänderung gedeutet wird, aber natürlich mit gleichem Rechte als eine durch den Magnetismus erzeugte electromo-

1) von Ettingshausen u. Nernst, Wien. Ber. 94. p. 593. 1886. Eine zweite, aus Wismuth anderer Herkunft gefertigte Platte hingegen lieferte bei den Temperaturen 0 , 21 , 99° für das Drehungsvermögen die Werthe $8,1$, $7,3$, $4,1$, zeigte also eine starke Abnahme schon bei gewöhnlicher Temperatur. Vgl. auch Leduc, Compt. rend. 102. p. 358. 1886.

2) Righi, Journ. de Phys. (2) 3. p. 355. 1884.

torische Gegenkraft, d. h. als longitudinaler Halleffect aufgefasst werden kann.¹⁾

Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Grösse dieses Effectes liegen bis jetzt nur einige vereinzelte Angaben vor, welche sich auf ein beschränktes Intervall erstrecken. So constatirte bereits Righi (l. c.), dass bis 100° die Widerstandsvermehrung infolge von Erregung des Magnetfeldes kleiner wird. E. von Aubel²⁾ theilte kürzlich einen Versuch mit, wonach dieselbe bei 99,7° nur 0,415 Proc. betrug, während sie unter sonst gleichen Umständen bei 0° 2,9 Proc. war, constatirte also eine sehr bedeutende Veränderlichkeit mit der Temperatur, was die mitzutheilenden eigenen Versuche durchaus bestätigen.

Bei unseren Messungen, welche sich wiederum bis über den Schmelzpunkt hinaus erstrecken, befand sich das Wismuth im Inneren einer dünnwandigen Glascapillare, welche senkrecht zu den Kraftlinien des Feldes in den Erhitzungsapparat eingeführt wurde (cf. Fig. 3). Die Zuleitungen des Primärstroms und die Ableitungen zum Galvanometer wurden durch je zwei, zur gegenseitigen Isolation mit Glascapillaren überzogene Platindrähte vermittelt. Der Ausschlag, welchen das Galvanometer bei geschlossenem Primärstrom anzeigt, ist dem Widerstande des Wismuthstäbchen proportional und kann durch ihn die Zunahme dieses bequem gemessen werden. Zur besseren Ausnutzung der Scala des Galvanometers wurde gewöhnlich mittelst einer durch Abzweigung von einem Hülfs-elemente erzeugten electromotorischen Kraft der Ausschlag compensirt. Diese Methode hat den grossen Vortheil, unabhängig von etwaigen Uebergangswiderständen zu sein, welche an den Zuleitungen zum Wismuth ihren Sitz haben könnten. Auch die Glascapillaren sprangen nicht, wenn das Wismuth wieder festen Aggregatzustand annahm.

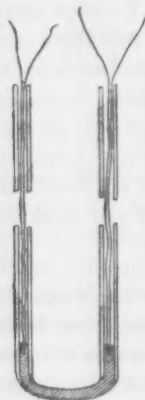


Fig. 3.

1) Nernst, Wied. Ann. 31. p. 783. 1887.

2) E. von Aubel, Phil. Mag. (5) 28. p. 342. 1889.

In der folgenden Tabelle sind die bei den daneben stehenden Temperaturen t beobachteten Werthe für die Widerstandszunahme infolge der Magnetisirung Δw in Proc. verzeichnet; in der dritten Columnne befindet sich der Widerstand w des Wismuthstäbchens in S.-E.

t	Δw	w
16°	21,9 Proc.	0,250
100	8,0 "	0,227
223	0,96 "	0,250
290	0,41 "	0,117
35	15,1 "	0,207
18	18,6 "	0,208

Die Zahlen sind in der Reihenfolge mitgetheilt, in der wir sie erhielten; zwischen der vorletzten und letzten Messung lag ein Zeitraum von mehreren Stunden. Sowohl an der Widerstandszunahme, wie besonders an der absoluten Grösse des Widerstandes ist deutlich erkennbar, dass beim Abkühlen sich der frühere Zustand nicht genau wieder herstellte. Möglicherweise wirkte hier eine Auflösung des Platins der Zuleitungsdrähte im geschmolzenen Wismuth mit, welche bei der leichten Legirbarkeit dieser Metalle mindestens spurenweise erfolgen muss.

Bei 290° war das Wismuth geschmolzen; die Erscheinung, dass der specifische Widerstand dieses Metalles beim Schmelzpunkte plötzlich sehr viel kleiner wird, ist bereits wiederholt¹⁾ beobachtet worden und findet sich auch in den von uns für w gefundenen Werthen ganz auffallend wieder. Die Widerstandszunahme des flüssigen Wismuths infolge der Magnetisirung war unzweifelhaft vorhanden, wenn auch ausserordentlich viel kleiner, wie die des festen Metalls bei gewöhnlicher Temperatur. Ob dieselbe in beiden Fällen einer gleichen Wirkung entspringt, oder ob vielleicht Strömungen, welche infolge der vom Electromagnet auf den flüssigen Leiter ausgeübten ponderomotorischen Kraft entstehen können, eine secundäre Rolle spielen, muss vorläufig dahin-

1) Insbesondere sind unsere Resultate im Einklang mit den Beobachtungen von C. L. Weber (Wied. Ann. 27. p. 145. 1886), sowohl was die bedeutende Widerstandsabnahme beim Schmelzen, wie den Umstand anlangt, dass beim Abkühlen sich häufig der frühere Zustand nicht wieder herstellt.

gestellt werden. Doch sprechen die beim Quecksilber gemachten Beobachtungen (s. u. p. 578) mehr für die letztere Auffassung. Jedenfalls zeigen longitudinaler wie transversaler Halleffect beide die Erscheinung, dass sie bei hoher Temperatur an Intensität sehr stark abnehmen; aber der Grad der Abnahme geht keineswegs bei beiden parallel. Während die Widerstandszunahme schon bei erheblich unter dem Schmelzpunkt liegenden Temperaturen einen sehr kleinen Betrag annimmt, liegt beim Halleffect das Gebiet der schnellen Abnahme entweder sehr nahe beim Schmelzpunkt oder aber er verschwindet plötzlich, wenn das Wismuth den flüssigen Aggregatzustand annimmt. Die Entscheidung zwischen letzteren beiden Möglichkeiten dürfte erhebliches Interesse bieten, war uns zu treffen bisher aber nicht möglich.

Bei einer zweiten mit Wismuth gleicher Herkunft beschickten Capillare fanden wir die Werthe:

t	29°	310°	254°	32°	100°	34°
Δw	16	0,1	1,2	20	9,1	22,0 Proc.

und mit einer dritten:

t	25°	310°
Δw	33,3	0,4 Proc.

Resultate, welche mit dem früheren Ergebniss in Uebereinstimmung sich befinden.

Aus den bisherigen Ergebnissen kann man wohl mit einiger Sicherheit den Schluss ziehen, dass auch die thermomagnetischen Phänomene bei hohen Temperaturen an Stärke bedeutend einbüßen werden; thatsächlich ist denn auch bereits früher von einem von uns eine Abnahme derselben mit zunehmender Temperatur mehrfach constatirt worden.¹⁾ Denn wenn auch eine zahlenmässige Beziehung zwischen den Intensitäten, mit welchen die verschiedenen magnetischen Effecte des Wismuths auftreten, bisher sich nicht hat auffinden lassen, so ist doch ein inniger Zusammenhang durch die Versuche an Wismuth-Zinnlegirungen²⁾ wohl ausser Zweifel gestellt.

Es ist bemerkenswerth, dass auch andere physikalische

1) Nernst, l. c. p. 772 u. 781.

2) E. v. Ettingshausen u. Nernst, Wied. Ann. 33. p. 790. 1888.

Eigenschaften des Wismuths eine ähnlich grosse Veränderlichkeit mit der Temperatur aufweisen; so wird nach Beobachtungen von Plücker und Matteucci¹⁾ der *Diamagnetismus* des Wismuths beim Schmelzpunkt ausserordentlich stark erniedrigt. Ferner verliert Wismuth bei höherer Temperatur die für dies Metall so charakteristische Sprödigkeit, indem es sich in Drahtform pressen²⁾, ja sogar bei Temperaturen von 230 bis 260° mit Anwendung einiger Kraft kneten lässt.³⁾ Für einen derartigen Parallelismus sprechen auch die an anderen Metallen gemachten Erfahrungen; denn es lässt sich im grossen und ganzen nicht verkennen, dass ausser Wismuth gerade die durch ihre Sprödigkeit ausgezeichneten, metallisch leitenden Stoffe, wie Kohle, Antimon und besonders Tellur, sich besonders activ erweisen.

Hallphänomen im Antimon. In der gleichen Weise, wie beim Wismuth, bestimmten wir auch beim Antimon den Einfluss der Temperatur, wobei wir uns einer viereckigen Platte, welche mit vier am Rande als Electroden mittelst einer Stichflamme eingeschmolzenen Platindrähten versehen war und eine Dicke von 0,201 cm besass, bedienten. Wir erhielten der Reihe nach folgende Werthe:

t	17°	210°	230°	30°	23°
e	1	0,78	0,72	0,76	0,91.

Es fällt bei diesen Zahlen auf, wie geringfügig der Einfluss der Temperatur beim Antimon verglichen mit Wismuth ist. Hiermit steht vielleicht wieder der Umstand in Zusammenhang, dass Antimon sich erst bei erheblich höheren Temperaturen als Wismuth und da nur mit Anwendung viel grösseren Druckes zu Draht pressen lässt.⁴⁾

Hallphänomen mit Quecksilber. In dem gleichen Apparat, in welchem geschmolzenes Wismuth zur Untersuchung gelangt war (Fig. 2), wurde Quecksilber der Messung unterworfen. Wir beobachteten, wie schon erwähnt, einen deutlichen Ausschlag bei Commutiren des magnetisirenden Stromes, welcher jedoch mit der Richtung des das

1) G. Wiedemann, *Galv.* 2. p. 586.

2) Matthiessen, *Pogg. Ann.* 100. p. 177. 1857.

3) Ph. Lenard, *Wied. Ann.* 39. p. 641. 1890.

4) Lenard, *l. c.* p. 639.

Quecksilber durchfliessenden Stromes die eigene nicht wechselte und demgemäss nicht von einer Hall'schen Wirkung herrührte; und zwar betrugen die wegen der directen Fernwirkung des Electromagnets auf die Galvanometernadel corrigirten Nadelausweichungen bei beiden Richtungen des Primärstromes 49, bzw. 46 Scalentheile. Das Quecksilber hatte Zimmertemperatur. Als das Glasgefäss, in welchem sich jenes befand, zur Verminderung etwaiger durch Peltier-effecte oder Joule'sche Wärme erzeugter Temperaturverschiedenheiten in ein Gefäss mit Wasser gesetzt wurde, betrugen unter sonst gleichen Umständen die bei den Erregungen des Magnets auftretenden Ausschläge 53, bzw. 48 Scalentheile. Bei der Grösse der störenden Nebenwirkung wäre es gewagt, die halben Differenzen, welche in beiden Fällen mit gleichem Vorzeichen bei Umkehr des Primärstromes auftreten und 1,5 im ersten, 2,5 Scalentheile im zweiten Falle betragen, als Hall'sche Wirkung zu deuten; doch sei der Vollständigkeit halber angeführt, dass dieselben einer Hall'schen Wirkung entsprechen würden, welche in gleicher Richtung aber etwa 300mal schwächer aufträte, wie beim Wismuth unter sonst gleichen Bedingungen.¹⁾

Widerstandszunahme im Quecksilber. Das Metall wurde in dem gleichen Apparate, Fig. 3, wie das geschmolzene Wismuth bei Zimmertemperatur untersucht. Es ergab sich in der That eine kleine, aber unzweifelhafte Vergrösserung des Widerstandes der mit Quecksilber erfüllten Capillare infolge der Wirkung des Magnetismus, wie die nachfolgenden Zahlen beweisen.

Stromstärke	Δw	
0,086 Ampère	0,271 Proc.	Magnetfeld ca. 8000.
0,318 "	0,159 "	

Die Widerstandszunahme ändert sich also merklich mit der Intensität des das Quecksilber durchfliessenden Stromes und wird so die Auffassung nahe gelegt, besonders bei Berücksichtigung der im vorstehenden Absatz mitgetheilten Resultate, dass obige Widerstandszunahme nicht mit der beim festen Wismuth beobachteten in Parallele zu stellen ist, sondern vielleicht einer directen electrodynamischen Wir-

1) Vgl. dazu Roiti, Journ. de Phys. (2) 2. p. 513. 1883.

kung des Magnetismus auf den flüssigen Leiter ihre Entstehung verdankt.

Anhang, die optischen Eigenschaften des Wismuths im Magnetfelde betreffend, von P. Drude.

Es wurde vor einiger Zeit das Wismuth auf eine eventuelle Aenderung seiner optischen Constanten im Magnetfelde durch Beobachtung von reflectirtem Lichte untersucht; das einfallende Licht war linear unter dem Azimuth 45° gegen die Einfallsebene polarisirt. Es wurde eine Wismuthsorte untersucht von grosser Reinheit, welche bei den oben angeführten Versuchen eine starke Widerstandsänderung im Magnetfelde zeigte und eine weniger reine Sorte, welche nicht hinsichtlich des letzteren Verhaltens geprüft ist.

Die beiden Pole des Electromagnets waren stets sehr genähert, zum Theil bis auf 3 mm. Wenn der Gang der Lichtstrahlen es gestattete, waren die Wismuthspiegel in der Mitte zwischen den Polen angebracht, sodass sie sich in sehr starkem magnetischen Felde befanden.

Es wurden die drei Fälle untersucht: 1) dass die Kraftlinien senkrecht zum Spiegel verliefen, oder 2) parallel dem Spiegel und in der Einfallsebene des Lichtes oder 3) parallel dem Spiegel und senkrecht zur Einfallsebene. In keinem Falle war eine Aenderung der optischen Constanten zu constatiren, weder eine solche, welche sich mit der Magnetisierungsrichtung umkehrte, noch eine solche, welche von der Richtung unabhängig und die eventuell nur an das Vorhandensein des magnetischen Feldes überhaupt geknüpft gewesen wäre. Dieser letztere Fall wäre denkbar gewesen, wenn die Aenderung der optischen Constanten des Wismuths ganz parallel verlief mit der des electricen Widerstandes. Dieser ist bekanntlich von der Magnetisierungsrichtung unabhängig, jedoch verschieden parallel oder senkrecht zu den Kraftlinien. Im letzteren Falle müsste der Wismuthspiegel sich wie ein reflectirender absorbirender Krystall verhalten und diese Erscheinung müsste daran zu erkennen sein, dass die elliptische Polarisation des reflectirten Lichtes durch Erregung des Magnetfeldes geändert und dann von der Lage

der Einfallsebene abhängig würde. In keinem Falle war aber eine solche Modification deutlich zu bemerken, indem sowohl die relative Phasenverzögerung als auch das Amplitudenverhältniss des reflectirten Lichtes bei unerregtem magnetischen Felde dieselben waren, wie bei erregtem und zwar in allen oben angeführten drei Versuchsanordnungen.

Wenn eine Aenderung der Natur des reflectirten Lichtes eintreten sollte, welche sich mit der Magnetisirungsrichtung umkehrt, so würde dies ein dem von Kerr entdeckten Verhalten der magnetischen Metalle, Eisen, Nickel, Cobalt analoges Phänomen sein. Um eine solche eventuelle Aenderung noch besser entdecken zu können, wurde mit sehr intensivem weissen Lichte beobachtet, welches in oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirt war. Eine Drehung der Polarisationssebene in dem Betrage von $1'$ wäre noch zu constatiren gewesen. Es war aber eine solche nicht vorhanden. Bei einem Stahlspiegel war bei denselben Versuchsanordnungen das Kerr'sche Phänomen sehr deutlich zu beobachten, unter gewissen Bedingungen¹⁾ ergaben sich Drehungen der reflectirten Polarisationssebene bei commutirtem Magnetfeld bis zum Betrage von $32'$.

Das sich aus meinen Beobachtungen ergebende negative Resultat am Wismuth befindet sich im Einklang mit Beobachtungen des Hrn. Righi²⁾ und im Widerspruch mit Beobachtungen Hrn. Hurion's³⁾, nach welchem am Wismuth das Kerr'sche Phänomen bei senkrechter Incidenz den Betrag von $18'$ erreichen soll. Ich halte indess dieses Beobachtungsergebniss nicht für sicher, da das Licht zweimal eine Glasplatte durchsetzte, welche der Polarisationssebene eine sehr starke electromagnetische Drehung ertheilte. Bei meiner Versuchsanordnung waren solche Glasplatten vermieden und das Resultat ist aus derselben also jedenfalls in directerer Weise abgeleitet, als bei Hrn. Hurion.

Göttingen, Phys. Inst., Oct. 1890.

1) Wenn nämlich die magnetische Axe senkrecht zum Spiegel stand, der Einfallswinkel 68° betrug und das einfallende Licht parallel zur Einfallsebene polarisirt war.

2) Righi, *Ann. de chim. et de phys.* (6) 4. p. 443. 1885.

3) Hurion, *Journ. de Phys.* (2) 3. p. 360. 1884.

**VI. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit
electrischer Wellen in isolirenden Flüssigkeiten;
von L. Arons und H. Rubens.**

Maxwell hat bekanntlich eine Theorie entwickelt, der zufolge zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit electrischer Wellen in isolirenden Substanzen und der Dielectricitätsconstante derselben eine enge Beziehung besteht. Diese Beziehung findet ihren Ausdruck in der Formel $n^2 = \mu$, worin n das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle im Vacuum (resp. in Luft) zu derjenigen in der fraglichen Substanz, μ die Dielectricitätsconstante der letzteren bedeutet.¹⁾ Bisher war es nur möglich, diese Beziehung experimentell zu prüfen unter der Annahme, dass die Lichtschwingungen electrische Schwingungen seien (electromagnetische Lichttheorie). Nun ist aber der optische Brechungsexponent n wesentlich abhängig von der Wellenlänge; man hat diese Schwierigkeit dadurch zu umgehen gesucht, dass man mit Hülfe der Dispersionsformeln (Cauchy) den Brechungsexponenten für unendlich lange Wellen durch Extrapolation zu bestimmen versuchte. Selbstverständlich kann auf die so gefundenen Werthe von n_∞ kein grosses Gewicht gelegt werden. Nichtsdestoweniger zeigte sich bei einer Anzahl von festen Körpern und Flüssigkeiten die Maxwell'sche Beziehung erfüllt und dieser Umstand bildet eine der Stützen der electromagnetischen Lichttheorie. Eine wesentliche Ausnahme bildeten jedoch bisher eine Reihe pflanzlicher und thierischer Oele; so fand Hr. Hopkinson²⁾:

1) Kirchhoff hat für den speciellen Fall eines Kabels den Satz abgeleitet, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit electrischer Wellen in demselben der Wurzel aus der Dielectricitätsconstante der isolirenden Schicht umgekehrt proportional ist. Monatsber. d. Berl. Acad. 29. Oct. 1877. Gesammelte Abhandl. p. 182.

2) Hopkinson, Phil. Trans. 2. p. 355. 1881. Beibl. 6. p. 110. 1882.

	Dielectricitäts- const. μ	$\sqrt{\mu}$	n_{∞}
Ricinusöl . . .	4,78	2,18	1,4674
Olivenöl . . .	3,16	1,78	1,4598
Klauenöl . . .	3,07	1,75	1,4578
Spermacetöl	3,02	1,74	1,4611

Die angeführten Oele sind sämmtlich gute Isolatoren. Nach einer Methode¹⁾, die das etwa vorhandene Leitungsvermögen und die Dielectricitätsconstante getrennt zu bestimmen gestattet, ergab sich beispielsweise für Ricinusöl $\mu = 4,82$, während das Leitungsvermögen zu $7,7 \cdot 10^{-17}$, bezogen auf Quecksilber gleich 1, gemessen wurde.

Hr. Hopkinson hat später die Vermuthung ausgesprochen, dass diese Oele im ultrarothem Theile des Spectrums anomale Dispersion zeigen könnten. In diesem Fall kann der Brechungsexponent jede beliebige Grösse erreichen.

Durch die Untersuchungen von Hertz ist nunmehr die Möglichkeit gegeben, das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeit electricischer Wellen in Luft und anderen Isolatoren zu messen und so die von Maxwell entwickelte Theorie direct experimentell zu prüfen. Wir haben für eine Reihe von Flüssigkeiten das erwähnte Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bestimmt²⁾ und werden im Folgenden diese Verhältnisszahl in Analogie mit der Ausdrucksweise der Optik, als Brechungsexponenten der untersuchten Flüssigkeit bezeichnen.

Versuchsanordnung und Apparate.

Die Versuchsanordnung schliesst sich unmittelbar an einen der ersten Hertz'schen Versuche³⁾ an. Hr. Hertz führte zu einem Drahtviereck von 125 cm Länge und 80 cm Breite, welches in der Mitte der einen Seite aufgeschnitten und mit einer kleinen Funkenstrecke versehen war, einen Draht. Dieser vermittelte die Verbindung des Vierecks mit der einen von zwei Electroden, zwischen welchen durch ein

1) E. Cohn u. L. Arons, Wied. Ann. 28. p. 454. 1886.

2) Die Versuche des Hrn. Waitz (Wied. Ann. 41. p. 495. 1890) über die Länge electricischer Wellen in isolirenden Flüssigkeiten haben bisher keine zuverlässigen Resultate ergeben.

3) H. Hertz, Wied. Ann. 31. p. 421. 1887.

Inductorium sehr schnelle electrische Schwingungen erregt wurden. In der Funkenstrecke des Drahtvierecks beobachtete Hr. Hertz kleine Fünkchen, welche nur dann ausblieben, wenn der Zuleitungsdraht von der primären Electrode das Drahtviereck im Mittelpunkte der der Funkenstrecke gegenüberliegenden Seite berührte. Hr. Hertz bezeichnet diesen Punkt als Indifferenzpunkt. Wurde eine zweite Seite des Drahtvierecks aufgeschnitten und zwischen die so entstehenden Endpunkte ein Draht von grösserer Länge eingeschaltet, so verschob sich der Indifferenzpunkt nach der verlängerten Seite hin; durch Einschalten der gleichen Drahtlänge auf der gegenüberliegenden Seite konnte er wieder in seine alte Lage zurückgebracht werden. Wurde der eingeschaltete Draht zu einer Spirale zusammen gerollt, so zeigte sich wiederum eine Verschiebung des Indifferenzpunktes, da die Fortpflanzungszeit eine Function der Selbstinduction und die Lage des Indifferenzpunktes dadurch bestimmt ist, dass der Weg von dieser Stelle aus nach der einen und der anderen Electrode der Funkenstrecke gleich ist.

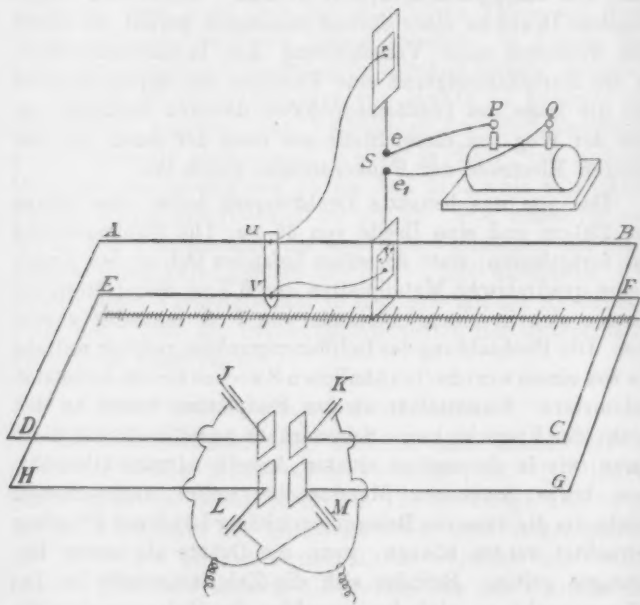
Das von uns benutzte Drahtviereck hatte eine Länge von 230 cm und eine Breite von 35 cm. Die Funkenstrecke war fortgelassen; statt derselben befanden sich an den Enden kleine quadratische Metallplatten von 5,5 cm Seite; dieselben standen sich in einem Abstände von 7 cm einander gegenüber. Die Beobachtung des Indifferenzpunktes geschah mittelst des von einem von uns ¹⁾ zu ähnlichen Zwecken bereits benutzten Bolometers. Unmittelbar an den Endplatten waren an den Draht des Vierecks kurze Seitendrähte angelöthet; auf diese waren (wie in der soeben citirten Arbeit) mittelst Glasröhrchen kurze Stückchen Messingrohr isolirt aufgeschoben, welche als die äusseren Belegungen kleiner Leydener Flaschen betrachtet werden können, wenn die Drähte als innere Belegungen gelten. Befindet sich die Zuleitungsstelle im Indifferenzpunkt, so wird der Ausschlag des Galvanometers ein Minimum sein. Er müsste vollkommen verschwinden, wenn

1) H. Rubens, Wied. Ann. 41. p. 154. 1890. Ueber das Bolometer siehe auch H. Rubens u. R. Ritter, Wied. Ann. 40. p. 55. 1890 u. A. Paalzow u. H. Rubens, Wied. Ann. 37. p. 769. 1889.

die Anordnung in jeder Beziehung zum Indifferenzpunkt symmetrisch wäre.

Bewegt man den Zuleitungsdraht nach der einen oder anderen Seite vom Indifferenzpunkt fort, so erhält man grössere und grössere Ausschläge. Die Lage des Indifferenzpunktes lässt sich, wenn man die Ausschläge des Galvanometers als Function der Einstellung am Drahte aufträgt, sehr leicht nach der Methode der Schwerlinien ermitteln.¹⁾

Zur Ausführung der Versuche bedienten wir uns einer etwas anderen Anordnung, welche gegenüber der bisher beschriebenen einige wesentliche Vortheile bot. Wir spannten statt eines Drahtvierecks deren zwei aus, *ABCD* und *EFGH*



(s. Figur), welche in einem Abstand von 8 cm vertical übereinander lagen. Wir konnten so beide Pole des Inductori-
ums benutzen, indem von jedem eine Zuleitung zu einem

1) H. Rubens, Wied. Ann. 42. p. 164. 1891.

der Drahtvierecke hergestellt wurde. Diese Verbindung war jedoch keine directe. Von den Polen P und Q des Inductoriums führten Drähte zu der Funkenstrecke S des primären Leiters. Dieser bestand aus zwei 15 cm langen, vertical stehenden Messingstangen e und e_1 , welche an den einander zugekehrten Enden die Polkugeln der Funkenstrecke, an den anderen Enden zwei quadratische Metallplatten von 40 cm Seite trugen. Diesen letzteren gegenüber befanden sich in einem Abstand von 3 bis 4 cm zwei kleine Blechplatten x und y von 8 cm Seite; dünne Drähte, welche in Schleifcontacten endigten, vermittelten die Verbindung zwischen diesen Plättchen und den Drahtvierecken. Die Schleifcontacte u und v waren durch einen verticalen Holzstab starr miteinander verbunden; letzterer trug in seiner Verlängerung einen Zeiger, welcher über einer Millimeterscala spielte. Die Einstellungen konnten bei dieser Anordnung mit grosser Schärfe vorgenommen werden. Durch die verticale Stellung des primären Leiters wurde die störende Einwirkung desselben auf die horizontalen Vierecke durch directe Strahlung vermieden. Zur grösseren Sicherheit befand sich ausserdem zwischen dem Inductorium und dem primären Leiter einerseits, den Drahtvierecken andererseits ein 2 m hohes und ebenso breites Gitter aus verticalen Drähten, welches in der Figur nicht angedeutet ist. Die Zuleitungsdrähte zu den Drahtvierecken waren zwischen den Gitterdrähten durch Glasröhren isolirt hindurchgeführt.

Die beiden Drahtvierecke waren, wie oben beschrieben, in der Mitte der einen Längsseite aufgeschnitten, mit Platten verbunden und mit Ansatzstücken nebst Leydener Flaschen J , K und L , M versehen. Die äusseren Belegungen dieser Leydener Flaschen waren überkreuz miteinander verbunden, nämlich J mit M und K mit L . Von diesen Verbindungsdrähten je zweier Belegungen führten die Leitungen zu den Endklemmen des Bolometers. Auch bei dieser Anordnung tritt, wie leicht ersichtlich, das Minimum des Ausschlags ein, wenn die Zuleitung der Schwingungen sich im Indifferenzpunkt befindet; nur ist das Minimum weit schärfer ausgeprägt, wie bei Anwendung eines einzigen Drahtvierecks. Ein weiterer Vortheil war es, dass fast die ganze electrische

Bewegung in dem Raume zwischen den beiden Drähten vor sich ging, also von äusseren Gegenständen nicht wesentlich beeinflusst werden konnte.

Durch Vorversuche mit kleinen „Leydener Flaschen“, welche auf den Drähten verschiebbar waren¹⁾, hatten wir uns von dem Schwingungszustand des Systems ein Bild gemacht. Wir hatten es mit stehenden Wellen zu thun; an der Zuleitungsstelle und an den Endplatten *J*, *K*, *L*, *M* befanden sich Schwingungsbäuche, ungefähr in der Mitte zwischen diesen Punkten Schwingungsknoten. Die Endplatten bewirken, dass die Knotenpunkte ein wenig zu ihnen hin verschoben sind. Das ganze System schwang also in völliger Analogie mit einem Stab, der im ersten und dritten Viertel seiner Länge eingespannt ist und in der Mitte angeschlagen wird.

Es ist uns nicht gelungen, den Ausschlag des Galvanometers vollkommen zum Verschwinden zu bringen, wenn sich die Zuleitungsstelle im Indifferenzpunkt befand. Es betrug der dann beobachtete Ausschlag noch etwa $\frac{1}{10}$ des in grösserer Entfernung (1 m) vom Indifferenzpunkt erhaltenen. Ein Ausschlag von derselben Grössenordnung ergab sich aber auch, wenn die Zuleitungsdrähte vom primären Leiter von den Drahtvierecken abgetrennt wurden. Einen Einfluss auf die Bestimmung des Indifferenzpunktes konnte ein solcher constanter Ausschlag nicht ausüben.

Vorversuche.

Natürlich lassen sich mit unserer Anordnung sämtliche Versuche wiederholen, die Hr. Hertz²⁾ mit dem Drahtviereck anstellte und zwar quantitativ. So schalteten wir z. B. auf der einen Seite des Doppelvierecks Drähte bis zu 1,50 m Länge ein; die Verschiebung der Zuleitung bis zu dem neuen Indifferenzpunkte betrug immer genau die Hälfte der zugeschalteten Drahtstrecke. Die Fehler in der Bestimmung des Indifferenzpunktes überschritten bei diesen, wie allen folgenden Bestimmungen in jeder Versuchsreihe nicht 1 cm.

Ersetzte man die eine kurze Seite des Doppelvierecks durch Drähte, welche horizontal in regelmässigem Zickzack

1) Rubens, l. c. p. 156.

2) Hertz, l. c. p. 422.

geführt waren, so betrug die Verschiebung bis zu dem neuen Indifferenzpunkt weniger als die Hälfte der hinzugekommenen Drahtlänge. Die scheinbare Verkürzung war um so stärker, je zahlreicher die Biegungen der Drähte waren. Ein ähnliches Resultat ergab sich, wenn die Drähte zu Spiralen gewunden waren. Je grösser die Zahl und je kleiner der Radius der Windungen wurde, desto mehr näherte sich die „scheinbare Länge“, d. h. das doppelte der gemessenen Verschiebung der Länge der Spiralenaxe.

Es war für uns von Wichtigkeit, zu untersuchen, welchen Einfluss die Veränderung der Capacität eines Theiles der Drahtvierecke auf die Lage des Indifferenzpunktes ausüben würde. Eine Annäherung der Drähte aneinander hatte bei dem kleinen Durchmesser des Drahtes (1 mm) sicher nur einen geringen Einfluss auf die Capacität. Ersetzten wir die eine der kurzen Seiten des Doppelvierecks durch Drahtbögen von 50 cm Länge, deren mittleren Abstand wir von 12 cm auf 3 cm verringerten, so zeigte sich bei dieser Veränderung keine merkliche Verschiebung des Indifferenzpunktes; dagegen erschien das Minimum weniger ausgeprägt. Dasselbe Ergebniss erhielten wir, als wir die beiden Drahtvierecke auf ihrer ganzen Länge in einen verticalen Abstand von 3 cm voneinander brachten.

Um die Capacität eines Theiles der Leitung zu verändern, ersetzten wir deshalb eine Strecke von 30 cm (die kurze Seite des Doppelvierecks) durch Zinkbleche von 1,2, resp. 2,5 cm Breite. Die Grösse der hierdurch hervorgerufenen Capacitätsänderungen bestimmten wir durch Beobachtung des galvanischen Leitungswiderstandes¹⁾, welchen eine beliebige Flüssigkeit (wir verwendeten eine Kochsalzlösung in einem grossen Glastrog) zwischen Electroden von der Form und Grösse unserer Drähte und Bleche besitzt. Die Widerstandsmessungen wurden mit Wechselströmen und dem Electrodynamometer ausgeführt. Bei einem Abstand der Electroden von 7 cm betrug der Widerstand der Flüssigkeit:

Zwischen Drähten von 0,1 cm Durchm.	Zwischen Blechstreifen von 1,2 cm Breite	Zwischen Blechstreifen von 2,5 cm Breite
21,0 Ohm	9,3 Ohm	4,7 Ohm

1) E. Cohn u. L. Arons, Wied. Ann. 28. p. 474. 1886.

Die gesuchten electrostatischen Capacitäten verhalten sich umgekehrt wie diese Widerstände. Es war mithin bei unseren Versuchen die Capacität der Leitung auf eine Strecke von 30 cm ungefähr im Verhältniss 1:2,3:4,9 verändert. Die Lage des Indifferenzpunktes erwies sich jedoch in allen drei Fällen als innerhalb der Versuchsfehler identisch. Nach der Auffassung, dass die metallische Leitung nur dazu dient, die Bahn der electricischen Bewegung zu bestimmen, ist dieses Resultat selbstverständlich.

Die Versuche.

Nach der modernen Auffassung der electricischen Vorgänge geschieht bei unserer Anordnung die Fortpflanzung der Schwingungen in dem Raume zwischen dem oberen und unteren Drahtviereck. Bringt man in einen begrenzten Theil dieses Raumes statt der Luft ein anderes Medium, so wird hierdurch die Weglänge geändert werden; diese Aenderung der Weglänge lässt sich durch die Verschiebung des Indifferenzpunktes bestimmen; das Verhältniss der Weglänge in irgend einem Medium zu derjenigen in Luft ergibt den Brechungsexponenten. Hierbei ist vorausgesetzt, dass auf die betrachtete Länge des Drahtvierecks die Schwingungen, welche vorher in Luft verliefen, bei dem Versuch mit der Flüssigkeit vollständig in dieser verlaufen.¹⁾ Um diese Bedingung zu erfüllen, bedienten wir uns folgender Einrichtung:

An Stelle der einen Schmalseite des Doppelvierecks konnten Drähte eingesetzt werden, welche durch einen 18 cm langen, 13 cm breiten und 14 cm hohen Blechkasten mittelst Gummistopfen isolirt hindurchgeführt waren. Die ausserhalb des Kastens bis zu den Ansatzstellen an die übrigen Theile des Doppelvierecks führenden Drahtstücke verliefen immer in der gleichen Weise geradlinig. Der im Kasten befindliche Theil war entweder auch geradlinig oder in der oben beschriebenen Weise im Zickzack geführt. Da der Einfluss der Kastenwände auch auf die äusseren Enden des Drahtes nicht vernachlässigt werden durfte, mussten Differenzbestim-

1) Eine weitere Voraussetzung ist, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der electricischen Schwingungen zwischen den Drähten dieselbe ist, wie im unbegrenzten Raume.

mungen vorgenommen werden, deren Berechnung sich aus folgendem Schema ergibt:

Bezeichnet man die Länge der ausgeschalteten Drahtvierecksseite mit d , die scheinbare Länge des ausserhalb des Kastens befindlichen, an ihrer Stelle eingesetzten Drahtes mit k , die scheinbare Länge des Drahtes im Kasten mit D_g , wenn wir es mit einem geraden, mit D_k , wenn wir es mit einem im Zickzack geführten Draht zu thun haben, so ergibt sich Folgendes:

Ist zu Anfang die Lage des Indifferenzpunktes p_0 , so wissen wir, dass die Längen l rechts und links von diesem bis zu den Endplatten einander gleich sind. Führen wir den Kasten mit geradem Draht ein, so ergibt sich aus einer Verschiebung des Indifferenzpunktes bis p_1 für die beiden Längen rechts und links von diesem Punkt:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} l - d + k + D_g - (p_1 - p_0) = l + (p_1 - p_0) \\ \text{oder} \quad D_g = 2(p_1 - p_0) + (d - k). \end{array} \right.$$

Ebenso findet sich nach Einsetzen des gebogenen Drahtes:

$$(2) \quad D_k = 2(p_2 - p_0) + (d - k).$$

Füllt man den Kasten in dem einen und anderen Falle vollständig mit einer Flüssigkeit, deren Brechungsexponent mit n bezeichnet wird, so ändert sich nur die Weglänge innerhalb des Kastens und zwar wächst sie auf das n -fache; wir erhalten also, wenn p_3 und p_4 die entsprechenden Lagen des Indifferenzpunktes sind:

$$(3) \quad n D_g = 2(p_3 - p_0) + (d - k),$$

$$(4) \quad n D_k = 2(p_4 - p_0) + (d - k).$$

Aus diesen vier Gleichungen folgt:

$$n = \frac{p_3 - p_2}{p_2 - p_1}.$$

Man erkennt¹⁾, dass wir zur Bestimmung eines Brechungsexponenten die Lage von vier Indifferenzpunkten kennen müs-

1) Die vorstehende Entwicklung lässt sich natürlich genau in derselben Weise durchführen unter der Voraussetzung, dass D_g ebenfalls gebogen und nur von anderer Länge ist wie D_k .

sen, nämlich derjenigen für zwei verschieden lange Drähte sowohl in Luft als in Flüssigkeit.

Wir haben diese Messung des Brechungsexponenten für vier Flüssigkeiten ausgeführt. Bei zwei derselben (Xylol und Petroleum) ist die Beziehung zwischen der Dielectricitätsconstante μ und dem optischen Brechungsexponenten n , $\mu = n^2$ sehr nahe erfüllt. Die beiden anderen gehören der in der Einleitung angeführten Reihe von Oelen an; wir haben diejenigen gewählt, deren Dielectricitätsconstanten den grössten Werth zeigen, nämlich Ricinusöl und Olivenöl. Für Ricinusöl haben wir zur Controle der Methode eine Reihe von Messungen mit verschiedenen Drahtlängen innerhalb des Kastens ausgeführt. In der folgenden Tabelle sind die Beobachtungsergebnisse dieser Versuche zusammengestellt:

Tabelle I. Lage des Indifferenzpunktes.

Draht Nr.	Kasten gefüllt mit		
	Luft	Ricinusöl	
I	10,5,	24,5	25,3
	10,7	25,8	
	12,1	25,6	
	29,1	61,6	
II	28,6	62,1	61,9
	28,8	62,2	
	35,1	74,0	
	35,4	74,2	
III	35,6	74,7	74,3
	48,0	100,2	
	48,1	100,0	
	48,6	100,8	
IV			100,3

Combinirt man die Zahlen für die Drähte:

$$\text{I und II, so folgt } n = \frac{61,9 - 25,3}{28,8 - 11,2} = \frac{36,6}{17,6} = 2,08,$$

$$\text{I " III, " " } n = \frac{74,3 - 25,3}{35,4 - 11,2} = \frac{49,0}{24,2} = 2,03,$$

$$\text{I " IV, " " } n = \frac{100,3 - 25,3}{48,2 - 11,2} = \frac{75,0}{47,0} = 2,03,$$

$$\text{Mittel: } n = 2,05.$$

Bei der Messung der Brechungsexponenten der übrigen Flüssigkeiten wurden nur der gerade Draht (I) und der längste (IV) der gebogenen Drähte in Anwendung gebracht. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Tabelle II. Lage des Indifferenzpunktes.

Dielectricum im Kasten	Draht Nr. I		Draht Nr. IV	
Luft	10,5	11,2	48,0	48,2
	10,7		48,1	
	12,1		48,6	
Olivenöl	23,2	23,6	87,4	87,0
	23,2		86,8	
	24,5		86,9	
Xylol	20,7	20,8	75,9	76,4
	20,8		76,3	
	20,7		77,0	
Petroleum	18,5	18,3	69,8	70,1
	18,4		70,1	
	18,0		70,3	

Hiernach ergibt sich der Brechungsexponent

$$\text{des Olivenöls } n = \frac{87,0 - 23,6}{48,2 - 11,2} = \frac{63,4}{37,0} = 1,71,$$

$$\text{des Xylols } n = \frac{76,4 - 20,8}{48,2 - 11,2} = \frac{55,6}{37,0} = 1,50,$$

$$\text{des Petroleums } n = \frac{70,1 - 18,3}{48,2 - 11,2} = \frac{51,8}{37,0} = 1,40.$$

Da einige der benutzten Substanzen nicht chemisch definiert sind, haben wir an demselben Material die Dielectricitätsconstanten μ nach der Methode von Schiller gemessen. Die verwendeten Schwingungen hatten eine Dauer von 30 bis 70 mal 10^{-6} Secunde.

In der Tab. III haben wir neben diese von uns gemessenen Werthe die Zahlen von Hopkinson und Cohn und Arons angeführt. Die Uebereinstimmung ist bei den wohl definirten Substanzen eine vollkommene; bei Ricinusöl und Olivenöl fanden wir etwas kleinere Werthe als die anderen Beobachter. Für die Grösse $\sqrt{\mu}$ wurden nur die von uns beobachteten Zahlen in Rechnung gezogen.

Tabelle III.

Dielectricum	Dielectricitätsconst. μ nach			$\sqrt{\mu}$	Brechungsexponent	
	Hopkin- son	Cohn u. Arons	Arons u. Rubens		$\lambda = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$	$\lambda = 6 \text{ m}$
Ricinusöl	4,78	4,82	4,67	2,16	1,48	2,05
Olivenöl	3,16	—	3,08	1,75	1,47	1,71
Xylol	—	2,36	2,35	1,53	1,49	1,50
Petroleum	2,07	—	2,06	1,44	1,45	1,40

Für diejenigen Flüssigkeiten, bei welchen die Gleichheit der Wurzel der Dielectricitätsconstanten und des optischen Brechungsindex besteht, ist der von uns gemessene Brechungsexponent für sehr lange Wellen (ca. 6 m) nahezu gleich demjenigen für kurze ($\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ m, $D = \text{Linie}$); wo diese Uebereinstimmung fehlt, ist die von uns gemessene Grösse sehr nahe gleich der Wurzel aus der Dielectricitätsconstanten. (Grösste Abweichung 5 Proc.) Wir betrachten dieses Ergebniss als eine Bestätigung der Maxwell'schen Beziehung $n^2 = \mu$.

Phys. Inst. der Univ. Berlin, Januar 1891.

VII. *Das Telephon als optischer Apparat zur Strommessung; von Max Wien.*

Es ist schon mehrfach der Versuch gemacht worden, die Bewegungen der Telephonplatte sichtbar zu machen, besonders hat in letzter Zeit Fröhlich¹⁾ mit Hülfe eines Spiegels, der zwischen Mitte und Rand der Telephonplatte aufgeklebt wurde, die Stromcurve eines Wechselstromes, also den Verlauf der einzelnen Schwingung studirt. Dies ist im Folgenden nicht meine Absicht, sondern es ist dies ein Versuch, das Telephons zur Messung der Intensität von constanten sowohl wie von alternirenden Strömen zu benutzen.

Zu diesem Zweck wurde eine sehr empfindliche Spiegelübertragung angewandt, welche in meiner Arbeit: „Ueber die Messung der Tonstärke“²⁾ genauer beschrieben und ähnlich derjenigen ist, welche von Röntgen³⁾ für Aneroidbarometer vorgeschlagen ist. Diese letztere besteht im wesentlichen darin, dass ein in der Mitte der Aneroidbarometerkapsel angebrachter Stift auf einen zu ihm senkrechten Spiegel wirkt, der um eine Axe drehbar ist. Die Drehung des Spiegels ist proportional der Bewegung des Stiftes. Bei sehr kleinen und schnellen Bewegungen, wie die der Telephonplatte, ist die Spiegelübertragung in dieser Form nicht brauchbar, da es nicht möglich ist, den Spiegel so um eine Axe drehbar zu machen, dass er genau diesen Bewegungen folgt. Die Axe wurde daher durch ein Stück feinsten Uhrfederblechs ersetzt, das auf dem einen Ende (A) eingeklemmt war und auf dem anderen einen kleinen leichten Spiegel (S) trug. Senkrecht gegen die Feder drückt bei

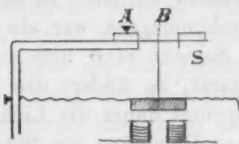


Fig. 1.

1) Fröhlich, Electr. Zeitschr. 10. p. 65. 1889.

2) M. Wien, Inaug.-Diss. Berlin 1888. p. 6. Wied. Ann. 34. p. 836. 1889.

3) Röntgen, Carl's Rep. 20. p. 44. 1878. Wied. Ann. 4. p. 305. 1877. Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XLII.

B der in der Mitte der Telephonplatte angebrachte Stift. Bewegt sich derselbe, so biegt sich das Blech zwischen *A* und *B*, und der Spiegel dreht sich, wobei, wie sich theoretisch und experimentell nachweisen lässt¹⁾, diese Drehung proportional der Bewegung des Stiftes ist und $\frac{3}{2}$ mal so gross, als wenn der Spiegel bei *A* um eine Axe drehbar wäre. Die Empfindlichkeit dieser Spiegelübertragung ist offenbar abhängig von der Entfernung *AB*; ich wählte dieselbe zwischen 0,5 und 1 mm. Es lässt sich berechnen, dass bei einer Bewegung des Stiftes um 1μ , der Spiegel einen Winkel von ca. 0,002 beschreibt, während sich mit der Pogendorff'schen Methode ein 100mal kleinerer Winkel noch bequem beobachten lässt. Bei den folgenden Versuchen wandte ich jedoch nicht diese Ablesungsmethode an, sondern ich betrachtete einen beleuchteten Spalt in dem Spiegel durch ein Fernrohr mit Oculartheilung. Diese Theilung war mit einem Diamant auf 0,1 mm in Glas eingeritzt, und da das Fernrohr etwa 20mal vergrösserte, so konnte noch bequem auf 0,1 Scalentheile abgelesen werden. 100 Scalentheile waren im Gesichtsfeld sichtbar. Die Entfernung vom Fernrohr zum Spiegel betrug ca. 70 cm, die vom Spiegel zum Spalt ca. 250 cm.

Da der Apparat nur zur Messung galvanischer Ströme dienen sollte, so brauchte auf die akustischen Eigenschaften des Telephons keine Rücksicht genommen zu werden, und ich ersetzte daher die dicke Eisenplatte durch eine dünne, gewellte Neusilbermembran, wie sie zu Aneroidbarometern gebraucht werden. In der Mitte derselben, gegenüber dem Telephonmagnet, war ein Stück weichen Eisens aufgelöthet.²⁾

Schickt man nun einen constanten Strom durch den Apparat, so ändert die Membran ihre Gleichgewichtslage, es springt daher die Lichtlinie im Gesichtsfeld mit vollkommener Dämpfung ein Stück weiter und bleibt ruhig stehen, so lange der Strom währt. Und zwar ist dieser Ausschlag proportional der Stromintensität, da wegen des starken, constanten Telephonmagnets die Bewegung der Membran dem Strom proportional ist. Um dies experimentell nachzuwei-

1) Vgl. meine Diss. p. 7 u. 8.

2) Ich gedenke in nächster Zeit eine ausführliche Beschreibung des Apparates in etwas abgeänderter Form zu geben.

sen, wurde benutzt, dass bei der Wheatstone'schen Brücke in der Nähe des Nullpunkts die Stromintensität der Widerstandsänderung, d. h. der Verschiebung des Schleifcontacts vom Nullpunkt proportional sein muss. — Der auch später immer benutzte Brückendraht hatte einen Widerstand von 1,92 Siemens bei einer Länge von 1 m. Es wurden auf beiden Seiten 10 Siemens zugeschaltet und auch die beiden anderen Widerstände zu je 11 Siemens gewählt. Ich erhielt folgende Zahlen; die erste Reihe gibt die Entfernung vom Nullpunkt in Centimetern Brückendraht an, die zweite den Ausschlag in Scalentheilen der Oculartheilung; die dritte den jedesmaligen mittleren Ausschlag für 10 cm.

cm :	-50	-40	-30	-20	-10	0	+10	+20	30	40	50
A :	-9,6	-7,8	-5,7	-3,8	-1,95	0	+1,9	3,9	5,7	7,6	9,6
10 cm :	1,92	1,95	1,90	1,90	1,95	0	1,90	1,95	1,90	1,90	1,92

Die Differenzen liegen innerhalb der Beobachtungsfehler. Es lässt sich hieraus zugleich die Empfindlichkeit des Apparates berechnen; es ergab sich für 10 cm = 0,019 S. Widerstandsänderung ein Scalenausschlag von 1,92. Nun war das benutzte Element ein Daniell, in jedem Zweige waren 11 Siemens Widerstand, im Brückenweig 201, demnach ergibt sich ein Scalentheil Ausschlag für ca. $5 \cdot 10^{-5}$ Ampère.

Die Einstellung auf den Strom Null geschieht, indem man das Fadenkreuz mit der Mitte des ziemlich schmalen Spaltbildes zusammenfallen lässt und nun die Widerstände so lange ändert, bis der Faden bei Stromschluss oder Wechsel nicht mehr die Mitte des Lichtstreifens verlässt. Hierbei sind noch Ströme von 10^{-6} Ampère und darunter merklich.

Damit ist jedoch noch lange nicht die Empfindlichkeit guter Galvanometer erreicht, der Vorzug des Apparates besteht darin, dass man die Stromstärke momentan ablesen kann, so dass er sich zur Beobachtung mit der Zeit veränderlicher Ströme, z. B. des Polarisationsstroms, vorzüglich eignet. Auch die Einstellung auf Null ist schnell und bequem, ich habe daher im Folgenden sämtliche Widerstandsmessungen mit diesem Apparat gemacht.

Bedeutend empfindlicher ist das „optische Telephon“, wie ich es der Kürze halber gegenüber dem Hörtelephon nennen möchte, bei der Messung von Wechselströmen.

Geht ein einfacher Sinusstrom, mit dem wir uns vorläufig nur beschäftigen wollen, durch den Apparat, so vibriert die Membran, der Spiegel dreht sich schnell hin und her, und es erscheint im Fernrohr statt einer Lichtlinie ein Lichtband, dessen Breite proportional der Amplitude des Sinusstroms ist.

Ausser von der Amplitude ist jedoch dieser Ausschlag auch noch von der Schwingungszahl des Sinusstroms abhängig, da, wie jedes Stück Metall, auch die Membran und die Feder mit dem daraufgeklebten Spiegel Eigentöne haben; je näher die Schwingungszahl des Stromwechsels einem dieser Eigentöne liegt, desto grösser wird die Bewegung des Spiegels und die Breite des Lichtbandes sein nach der Formel: $\alpha = E/(n^2 - p^2)^{1/2}$, worin n die Schwingungszahl der freien Schwingung, also des Eigentons ist, p die des erzwungenen, also des Sinusstromes.

Ist $p = 0$, d. h. lasse ich eine constante Kraft auf die Platte wirken, so ist:

$$\alpha_0 = \frac{E}{n^2}, \quad \frac{\alpha_0}{\alpha} = \frac{\frac{n^2}{E}}{\frac{1}{n^2 - p^2}} = 1 - \left(\frac{p}{n}\right)^2.$$

Wir betrachten zwei Grenzfälle: es sei n bedeutend grösser als p , was man dadurch erreichen kann, dass man die Platte dick und den Spiegel klein nimmt. Dann ist näherungsweise $\alpha = \alpha_0$, d. h. ich kann den Ausschlag durch den Sinusstrom direct mit dem durch einen constanten Strom hervorgerufenen vergleichen, also die Amplitude des Sinusstroms absolut messen. Da die in der Technik gebrauchten Wechselstrommaschinen annähernd Sinusströme und zwar von verhältnissmässig niedriger Schwingungszahl liefern, so wäre der Apparat zur Messung dieser Ströme geeignet.

In dem anderen Grenzfall, wenn $p = n$ ist, d. h. wenn der Eigenton der Membran und die Schwingungszahl des Sinusstroms übereinstimmen, wird der Ausschlag sehr gross. Dieser Fall wird uns im Folgenden ausschliesslich beschäftigen, da es auf diese Weise möglich wird, sehr schwache Wechselströme zu messen. Um besonders gute Wirkungen zu er-

1) Rayleigh, Theory of sound. 2. § 43.

zielen, müssen n und p genau übereinstimmen, und muss ich vor allem auseinandersetzen, wie dies erreicht wird.

Man beginnt damit, dass man die Dicke der Membran und das Gewicht des aufgelötheten Eisenstücks so wählt, dass ihr Grundton in dem Bereich liegt, in welchem man zu arbeiten wünscht; bei mir ca. 150 Schwingungen in der Secunde. Darauf stellt man die Feder (cf. Fig. 1) ein, deren Eigenton man dadurch ändern kann, dass man sie verlängert oder verkürzt, indem man sie bei A (Fig. 1) mehr oder weniger weit einklemmt. Das rohe Einstimmen geschah nach dem Gehör, zum feineren wandte ich eine Stimmpeife mit verschiebbarem Stempel an, und sah in dem Spiegel nach einer scharf begrenzten Linie, etwa einem Fensterrand, wobei eine Bewegung des Spiegels sofort merklich wird. Bei Aenderung des Pfeifentons traten zwei Maxima auf, das eine dem Eigenton der Membran, das andere dem der Feder entsprechend. Darauf wurde die Länge der Feder so lange geändert, bis beide Maxima zusammenfielen. Das nun auftretende Maximum war ein ziemlich breites, sodass der Apparat nicht allzuleicht verstimmt werden konnte.

Die höheren Eigentöne des Systems sind nur sehr wenig ausgebildet. Bei der Membran ist die Hauptmasse in dem in der Mitte aufgelötheten Eisenstück concentrirt, wo auch der Wirkungspunkt der Kraft liegt. Der grösste Theil der Feder ist durch den aufgeklebten Spiegel starr und nur ein kleiner und leichter Theil biegsam. Infolge dessen können bei beiden die höheren Eigentöne nur schwach oder gar nicht auftreten; wenigstens habe ich nie irgend einen Einfluss derselben merken können.

Schliesslich muss nun noch die Schwingungszahl des Wechselstroms mit dem Grundton der Membran in Uebereinstimmung gebracht werden. Es wurde der secundäre Strom eines Inductionsapparates benutzt, dessen primärer Strom durch eine electromagnetisch getriebene Saite unterbrochen wurde. Dieselbe arbeitet sicherer und bequemer als eine Stimmgabel und ist die Einrichtung dabei folgende. Eine Eisensaite wird unter einem Electromagnet aufgespannt; ungefähr in der Mitte derselben werden zwei Kupferdrähte (K_1 und K_2 ; s. Fig. 2) angelöthet, die in zwei Quecksilber-

näpfchen tauchen. Ein Accumulator (A_1), der Electromagnet und ein Quecksilbercontact werden in bekannter Weise zum Betriebe der Saite gebraucht. Der andere dient als Unterbrecher des primären Stromes des Inductionsapparates. Der

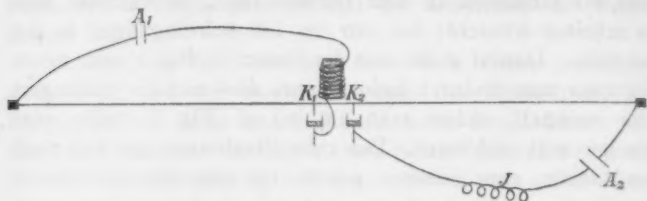


Fig. 2.

Vorzug der Methode ist, dass man die Tonhöhe bequem, schnell und in einem grossen Bereich ändern kann, ohne dass dabei die Saite zu schwingen aufhört. Dazu kommt ein sehr ruhiger und gleichmässiger Gang, auch wenn nur ein Daniell als treibende Kraft dient.

Der Contact zwischen der Saite und den Quecksilbernäpfchen wurde nicht durch Platindrähte, sondern durch dünne, amalgamirte Kupferdrähte bewirkt, wobei der Contact viel gleichmässiger ist, so dass das Lichtband im Fernrohr ganz ruhig steht und auch bei grossen Ausschlägen bequem auf $\frac{1}{10}$ Scalentheil abgelesen werden kann. Demnach kann mit diesem Apparat die Amplitude eines alternirenden Stroms auf mindestens 1 Proc. genau gemessen werden.

Um nun die Saite auf den Eigenton des Apparates einzustimmen, wird derselbe in den Brückenweig der Wheatstone'schen Brücke gebracht und der Schleifcontact so verschoben, dass ein passender Ausschlag entsteht. Nun wird der Ton der Saite durch Spannen so lange geändert, bis dieser Ausschlag ein Maximum erreicht.

Die ganze eben beschriebene Einstimmung der drei Töne aufeinander ist bei einiger Uebung in einer Viertelstunde leicht zu vollenden. — Der Apparat bleibt, einmal eingestellt, wochenlang brauchbar, ohne dass eine neue Einstimmung nothwendig wäre. Bei der Saite war dies öfter nothwendig, da sie vor dem Fenster stehen musste, wo sie

Temperaturveränderungen u. s. w. ausgesetzt war; im Zimmer rief ihr Ton einen kleinen Ausschlag hervor, der bei den meisten Untersuchungen störend gewirkt hätte.

Wie bei allen empfindlichen Apparaten war es nicht möglich mit Sicherheit Ausschläge auf einander zu beziehen, welche an verschiedenen Tagen beobachtet waren; jedoch ist dies im allgemeinen auch nicht nöthig. Im Folgenden habe ich nur solche Ausschläge miteinander verglichen, die durch Umschalten unmittelbar hintereinander erfolgten, wo also ein Fehler durch etwaige Aenderungen der Einstimmung absolut ausgeschlossen ist.

Es ist oben stillschweigend anstatt eines einfachen Sinusstroms der Strom eines Inductoriums eingeführt. Die Form des letzteren hängt wesentlich von dem Inductorium und der Art der Unterbrechung ab. Jedenfalls besteht er ausser dem Sinusstrom von der Periode der Unterbrechung aus einer Anzahl von Sinusströmen höherer Perioden, welche in dem System alle nebeneinander für sich bestehen und wenn man den Strom durch ein Hörtelephon schickt, als Obertöne auftreten.

Das optische Telephon nun zeigt für den Strom, auf dessen Periode es eingestimmt ist, einen mehr als 100fachen Ausschlag, wie für jeden anderen; infolge dessen kann der Ausschlag für die Sinusströme höherer Periode vernachlässigt werden, besonders wenn man ein Inductorium mit festem Eisenkern anwendet, wo die Stromcurve annähernd sinusförmig verläuft, sodass die Ströme höherer Periode verhältnissmässig schwach sind. Auf einen scharfen experimentellen Beweis dieser Eigenschaft des optischen Telephons komme ich weiter unten (p. 614) zu sprechen. Man hat dadurch den grossen Vortheil, dass man den durch eine Saitenunterbrechung gelieferten Inductionsstrom, dessen Periode constant ist und genau bestimmt werden kann, in Bezug auf den Apparat als einfachen Sinusstrom ansehen kann. Im Gegensatz hierzu muss man, wenn man mit dem Dynamometer Sinusströme studiren will, einen Sinusinductor anwenden, bei dem ein gleichmässiger Gang und eine genaue Bestimmung der Schwingungszahl nicht möglich ist.

Ferner unterscheidet sich der Apparat dadurch von dem

Dynamometer, dass der Ausschlag direct proportional der Stromamplitude ist, während dies bei dem Dynamometer nur bei der Wheatstone'schen Brücke mit Hülfe eines Kunstgriffs zu erreichen ist, indem man die feste Rolle, also einen verhältnissmässig grossen Widerstand in den Hauptzweig bringt.

Die Proportionalität zwischen Ausschlag und Stromamplitude musste experimentell bewiesen werden. Es geschah dies in derselben Weise wie oben bei constantem Strom, indem bei der Wheatstone'schen Brücke der Schleifcontact in der Nähe des Nullpunktes verschoben wurde, wobei der durch die Brücke gehende Strom dieser Verschiebung proportional ist.

Die Widerstände in den vier Zweigen waren dieselben, wie oben.

Ich erhielt folgende Tabelle, in welcher die erste Columnne die Verschiebung des Schleifcontacts vom Nullpunkt in Centimeter Brückendraht angibt, die zweite den beobachteten Ausschlag, die dritte den aus dem Mittelwerth der beobachteten berechneten Ausschlag, die vierte die Abweichungen:

cm	beob. A	ber. A	Δ
0	0	0	0
5	10,3	10,15	+0,15
10	20,2	20,3	-0,1
15	30,6	30,45	+0,15
20	40,6	40,6	$\pm 0,0$
25	50,7	50,75	+0,05
30	60,8	60,9	-0,1
35	70,9	71,05	-0,15
40	81,0	81,2	-0,20

Die Abweichungen liegen innerhalb der Beobachtungsfehler, somit ist die Proportionalität bewiesen.

Es konnte hieraus nicht in so einfacher Weise die Empfindlichkeit des Apparates bestimmt werden, wie oben bei constantem Strom. Einen angenäherten Werth erhielt ich, indem die mittlere electromotorische Kraft eines Sinus-inductors, welcher ungefähr soviel Umdrehungen in der Secunde machte, wie die Schwingungszahl des optischen Telephons betrug, mittelst eines Dynamometers festgestellt wurde. Darauf wurde bei gegebenen Widerständen in der Wheatstone'schen Brücke der Ausschlag des optischen

Telephons für den Strom des Sinusinductors abgelesen. Hieraus berechnete sich, dass, um einen Ausschlag von 1 Scalentheil hervorzurufen, eine mittlere Intensität des Sinusstroms von etwa $6 \cdot 10^{-7}$ Ampère nothwendig war. Bei der Einstellung auf den Strom Null waren ca. 10^{-8} Ampère noch merklich. Die Nulleinstellung geschieht am besten, indem ein dünner Draht in dem Spalt aufgespannt wird, der ziemlich breit und nicht zu hell beleuchtet sein muss. Geht ein Strom durch den Apparat, so erscheint der Draht breiter und weniger intensiv dunkel.

Das angewandte Dynamometer bedurfte für einen Ausschlag von einem Scalentheil einer mittleren Stromintensität von ca. 10^{-8} Ampère; jedoch war auch bei der Nulleinstellung die Empfindlichkeit nicht viel grösser, da wegen der langsamen und schwierigen Ablesung die Fehlergrenze ziemlich hoch lag.

Bei der grossen Verschiedenheit dieser beiden Apparate zur Messung von Wechselströmen dient vielleicht die Genauigkeit der Nulleinstellung bei der Messung eines inductionsfreien Widerstandes am besten zum Vergleich ihrer Empfindlichkeit. Ich gebe daher für jeden Apparat zehn Einstellungen in Centimetern des Brückendrahtes, der einen Widerstand von 1,92 Siemens besass, während 100 Siemens auf beiden Seiten hinzugefügt waren; in den beiden anderen Zweigen befanden sich auch je 101 Siemens. In der Brücke war einmal die bewegliche Rolle des Dynamometers mit einem scheinbaren Widerstand von 250 S., das andere mal das Telephon mit 234 S., sodass beide Apparate sich ungefähr unter denselben Bedingungen befanden. Ich erhielt folgende Werthe:

Dynamometer		Optisches Telephon	
cm	Δ	cm	Δ
45,9	4,5	50,9	0,4
54,0	3,6	50,3	0,2
51,6	1,2	50,8	0,3
47,1	3,3	50,5	0,0
50,6	0,2	51,1	0,6
48,6	6,8	50,3	0,2
52,9	2,5	50,8	0,3
55,2	4,8	50,0	0,5
53,1	2,7	50,0	0,5
50,3	0,1	50,2	0,3
504,3	29,7	504,9	3,3

Es ergibt dies einen mittleren Fehler in der Widerstandsbestimmung beim Dynamometer von 0,11 Proc., bei dem optischen Telephon von 0,012 Proc. Wichtiger jedoch als die grössere Genauigkeit ist die grössere Bequemlichkeit und Schnelligkeit der Einstellung. Zu zehn Einstellungen mit dem optischen Telephon waren nur etwa 3–4 Minuten erforderlich.

Das Hörtelephon lässt sich nicht in dieser Weise mit den anderen Apparaten vergleichen; jedenfalls kommt man nicht über eine Genauigkeit von $\frac{1}{10}$ Proc. hinaus. Es ist übrigens bei Anwendung des Sinusinductors als Stromquelle, also für reine Sinusströme, wie schon F. Kohlrausch bemerkt, sehr unempfindlich. Die Möglichkeit einer genauen Null-einstellung bei gewöhnlichen Inductionsströmen beruht auf der Empfindlichkeit des Hörtelephons für Wechselströme sehr hoher Periode, was jedoch wieder andere Uebelstände mit sich bringt. Ich komme auf diesen Punkt weiter unten zurück.

Der Widerstand des Telephons von ca. 200 Siemens ist bei sehr grossen oder sehr kleinen Widerständen in den vier Zweigen der Brücke nicht günstig. Um dem abzuhelfen, benutzt Chaperon¹⁾ zur Messung von Flüssigkeitswiderständen bis zu 100 000 Ohm einen Transformator, dessen eine Rolle 5000 Ohm hatte. Diese war in die Brücke eingeschaltet. Die andere hatte den Widerstand des Telephons und war mit demselben verbunden. Da ich oft mit kleinen Widerständen zu thun hatte, benutzte ich das entgegengesetzte Princip, indem ich in die Brücke die primäre Rolle eines Inductoriums mit weichem Eisenkern brachte, welche etwa 1,4 S. besass. Mit dem Telephon war die secundäre von etwa 90 S. Widerstand verbunden. Bei je 1 Siemens in den vier Zweigen der Brücke erhielt ich etwa den fünf-fachen Ausschlag, wie bei directer Einschaltung.

Die Haupteigenschaften des optischen Telephons sind also noch einmal kurz zusammengefasst, folgende:

1) Dasselbe misst mit grosser Empfindlichkeit einen Sinusstrom einer bestimmten Periode, unbekümmert um andere Ströme in dem System.

1) Chaperon, Journ. de Phys. 9. p. 481. 1890.

2) Der Ausschlag ist proportional der Amplitude dieses Sinusstromes.

Anwendungen.

Geht ein Wechselstrom durch eine Wheatstone'sche Brücke und befindet sich in einem Zweige derselben eine Inductionsrolle oder eine Flüssigkeitszelle, oder ist ein Condensator nebengeschaltet, so ist es nicht möglich, durch alleinige Widerstandsänderung den Strom in dem Brücken-zweig zum Verschwinden zu bringen, sondern man erhält nur ein Minimum. Und zwar fällt dieses Minimum nicht mit dem wahren Nullpunkt zusammen, d. h. mit dem Punkte des Brückendrahtes, wo $w_1 w_4 = w_2 w_3$ ist. Diese Differenz zwischen Minimum und Nullpunkt einerseits, der Vergleich der Stromamplituden im Minimum und Nullpunkt andererseits geben Werthe für die Capacität, das Selbstpotential und die Polarisation. Da sich auf diese Weise nur sehr grosse Capacitäten bestimmen lassen, so habe ich mich im Folgenden besonders mit der Selbstinduction und der Polarisation beschäftigt, mit letzterer bis jetzt nur, insofern sie bei der Messung von Flüssigkeitswiderständen in Betracht kommt.

Messung von Selbstpotentialen.

Es müssen zuerst die nothwendigen Formeln abgeleitet werden; ich gebe die ersten Gleichungen im Anschluss an Oberbeck.¹⁾ Geht ein veränderlicher Strom durch einen Leiter mit Selbstinduction, so besteht die Gleichung:

$$p \frac{\partial J}{\partial t} + wJ = E.$$

Hierin ist p das Potential des Zweiges auf sich selbst, J die Stromstärke zur Zeit t , w der Widerstand und E die electromotorische Kraft.

Dann lauten die Kirchhoff'schen Gleichungen; für jeden geschlossenen Kreis von Zweigen, in denen der Hauptzweig — der Sitz der electromotorischen Kraft — nicht vorkommt:

$$\sum \left\{ p \frac{\partial J}{\partial t} + wJ \right\} = 0$$

für jeden Verzweigungspunkt:

1) Oberbeck, Wied. Ann. 17. p. 820. 1882.

$$\sum J = 0.$$

Ist in dem Hauptzweig ein einfach periodischer Strom mit der Amplitude 1, $J = e^{int}$, so lauten die Gleichungen:

$$\sum \{K(inp + w)\} = \sum (Ka) = 0, \quad \sum K = 0,$$

$a = inp + w$ eine Grösse, welche von den Engländern Widerstandsoperator genannt wird.



Fig. 3.

K ist die Amplitude in jedem Zweige und lässt sich aus den obigen Gleichungen berechnen. Z. B. für den Brückenweig der Wheatstone'schen Brücke:

$$K = \frac{a_1 a_4 - a_2 a_3}{(a_1 + a_2)(a_3 + a_4) + w(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)}.$$

Hierin sind a_1 bis a_4 die Widerstandsoperatoren der vier Zweige der Wheatstone'schen Brücke und w der Widerstand des Brückenzweiges.

K ist im allgemeinen eine complexe Zahl $= \mu + i\nu$; führt man die Rechnung durch, indem man überall für $+i$ $-i$ setzt, so erhält man $K' = \mu - i\nu$.

Nun soll ein einfacher Sinusstrom:

$$J = \cos nt = \frac{1}{2}(e^{int} + e^{-int})$$

durch das System gehen, dann ist die Stromstärke für jeden Zweig:

$$J = \frac{1}{2}(\mu + i\nu)e^{int} + \frac{1}{2}(\mu - i\nu)e^{-int} = \mu \cos nt - \nu \sin nt \\ = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} \cos(nt - \varepsilon) = \sqrt{KK'} \cos(nt - \varepsilon).$$

Die Phasendifferenz $\varepsilon = \arctg(-\nu/\mu)$ hat Oberbeck zur Bestimmung von Selbstinductionscoefficienten benutzt. Uns interessirt im Folgenden nur die Amplitude $\alpha = \sqrt{KK'}$.

Es befinde sich nun in dem Zweige 1 der Wheatstone'schen Brücke eine Inductionsrolle, in den anderen sei die Selbstinduction zu vernachlässigen. Dann ist:

$$a_1 = w_1 + inp, \quad a_2 = w_2, \quad a_3 = w_3, \quad a_4 = w_4.$$

Demnach im Brückenweig:

$$\alpha^2 = KK' = \frac{(w_1 w_4 - w_2 w_3)^2 + n^2 p^2 w_4^2}{\{(w_1 + w_2)(w_3 + w_4) + w(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)\}^2 + n^2 p^2 (w + w_3 + w_4)^2}.$$

Es sei w_3 und w_4 , wie gewöhnlich, durch einen Schleifcontact veränderlich; der Punkt des Brückendrahtes, wo bei

constantem Strom im Brückenweig der Strom Null ist, sei „wahrer Nullpunkt“ genannt und die dazugehörigen Werthe mit w_3 und w_4 bezeichnet. Ferner sei δ der Widerstand des Stückes des Brückendrahtes, um welches der Schleifcontact von dem wahren Nullpunkt entfernt ist. Dann wird:

$$(1) \quad \alpha^2 = \frac{\delta^2(w_1 + w_2)^2 + n^2 p^2 (w_3 - \delta)^2}{\{w_1 + w_2\}(w_3 + w_4) + w(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)\}^2 + n^2 p^2 (w + w_3 + w_4)^2}.$$

Wenn man den Schleifcontact auf dem Brückendraht verschiebt, so ändert sich nur δ ; aus diesem Grunde ist δ als neue Grösse eingeführt.

Da im Nenner nur die Summe $w_3 + w_4 = w_{03} + w_{04} =$ dem Widerstand des ganzen Brückendrahtes vorkommt, so ist der Nenner von δ unabhängig und ich bezeichne ihn mit N .¹⁾

Der Zweck der folgenden Rechnung ist, zu zeigen, an welcher Stelle des Brückendrahtes, also für welches δ ein Minimum des Ausschlags eintritt.

Da diese Rechnung sich noch ein paar mal wiederholt, will ich sie schematisch durchführen. α^2 hat die Form:

$$(2) \quad \alpha^2 = \frac{A\delta^2 - 2B\delta + C}{N}.$$

Für den wahren Nullpunkt ($\delta = 0$) wird offenbar α nicht $= 0$, sondern:

$$(3) \quad \alpha_0^2 = \frac{C}{N}.$$

α^2 wird ein Minimum, wenn $\partial \alpha^2 / \partial \delta = 0$, d. h.:

$$(4) \quad \delta_1 = \frac{B}{A}.$$

Dann ist die Intensität im Minimum:

$$(5) \quad \alpha_1^2 = \frac{AC - B^2}{AN}.$$

1) Es ist hier die etwas ungewöhnliche Einrichtung getroffen, dass der Schleifcontact nicht mit dem Brückenweig, sondern mit dem Hauptzweig, dem Sitz der electromotorischen Kraft, verbunden ist. Wendet man die gewöhnliche Form der Brücke an, so tritt δ im Nenner der Gleichung (1) auf, ist aber von verschwindendem Einfluss auf seinen Werth, so lange δ klein gegen w , was hier im allgemeinen immer der Fall sein wird, da δ ein Stück des Brückendrahtes, also ein Bruchtheil von 1 Siemens ist, während w der scheinbare Widerstand des Telephons ca. 234 S. beträgt.

Bilden wir $(\alpha_0^2 - \alpha_1^2)/\alpha_1^2 = \rho^2$, so wird:

$$(6) \quad \rho = \frac{B}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

Im vorliegenden Fall — Inductionsspule im Zweige 1, Gleichung (1) — ist:

$$\delta_1 = \frac{B}{A} = \frac{n^2 p^2 w_0}{(w_1 + w_2)^2 + n^2 p^2}, \quad \rho = \frac{B}{\sqrt{AC - B^2}} = \frac{np}{w_1 + w_2}.$$

Hieraus:

$$np = (w_1 + w_2) \sqrt{\frac{\delta_1}{w_0 - \delta_1}} = (w_1 + w_2) \sqrt{\frac{\delta_1}{w_2}} \text{ und } np = (w_1 + w_2) \rho.$$

Wir haben hier zwei Gleichungen für np , sodass wir durch eine Einstellung gleichzeitig zwei voneinander unabhängige Werthe für diese Grösse erhalten, den einen durch die Bestimmung von δ_1 , den anderen durch die Bestimmung von ρ . — Der Gang des Versuchs ist im einzelnen folgender. Mittelst eines Umschalters leitet man zuerst einen constanten Strom durch das System, stellt auf den wahren Nullpunkt ein und erhält dadurch zugleich w_1 . Darauf leitet man durch Umschalten den Wechselstrom hindurch und liest den Ausschlag am Nullpunkt (α_0) ab; nun verschiebt man den Schleifcontact bis der Ausschlag ein Minimum wird und liest denselben (α_1) ab; damit erhält man:

$$\rho = \sqrt{\frac{\alpha_0^2 - \alpha_1^2}{\alpha_1^2}}$$

und den einen Werth von np . Den anderen erhält man zugleich durch δ_1 (das Stück des Brückendrahtes, um das der Schleifcontact vom Nullpunkt verschoben ist).

Im allgemeinen ist die Bestimmung von np aus der Gleichung $np = (w_1 + w_2) \rho$ vorzuziehen, da bei grösserer Selbstinduction der Ort des Minimums und damit δ_1 unsicher wird.

Um mit grösserer Sicherheit ρ bestimmen zu können, wurden zwei Schleifcontacts angewandt, der eine auf den Nullpunkt, der andere auf das Minimum eingestellt; mittelst einer Wippe konnte jeder derselben nach Belieben eingeschaltet werden. Nun konnten durch einfaches Umliegen der Wippe die Ausschläge α_0 und α_1 kurz hinter-

einander abgelesen werden, ohne dass Fehler von der Inconstanz des Wechselstroms u. s. w. zu befürchten waren. Bei einer Messung ist hierbei der Fehler etwa 1 Proc. Man kann jedoch durch Aenderung von w_3 und w_4 , welche in obigen Gleichungen nicht vorkommen, beliebig viele unabhängige Werthe für ρ erhalten; und ferner durch Aenderung

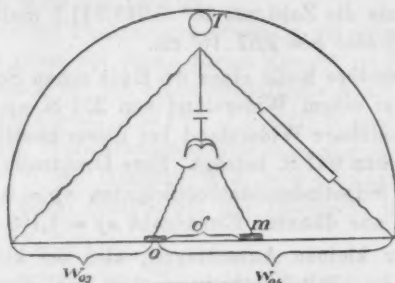


Fig. 4.

von $w_1 + w_2$ beliebig viele verschiedene ρ , die alle dasselbe np ergeben müssen; so dass man auf diese Weise np leicht bis auf $1/10$ Proc. und genauer messen kann. Die einzelne Messung ist sehr schnell gemacht, sodass ich in zwei Stunden über 30 Werthe für einen Selbstinductionscoefficienten erhielt.

Hiermit ist np gegeben, um p selbst zu erhalten, muss $n = 2\pi/T$ bestimmt werden. Mittelst der Methode der Schwebungen fand ich $1/T = 149,8$; also $n = 941,2$.

In den wenigen Tagen, in welchen, nachdem die Methode einmal festgestellt, die hier angegebenen Selbstinductionscoefficienten gemessen wurden, blieb die Schwingungszahl innerhalb der Fehlergrenzen constant. Es wurde dies ausser durch den Vergleich mit einer eingestimmten Stimmgabel noch durch Wiederholung der Messung von np bei einigen Rollen bewiesen, die bis auf Bruchtheile eines Procents dieselben Werthe ergab.

Zur besseren Veranschaulichung gebe ich für eine Rolle die ausführlichen Zahlen. w_1, w_2, np in Siemens, δ und w_4 in Centimeter Brückendraht, α_0, α_1 in Scalentheilen.

$w_1 + w_2$	δ	w_1	np	α_0	α_1	np	Bemerkungen
2,11	28,8	19,2	2,56	20,1	12,7	2,57	
3,11	26,1	38,5	2,56	22,8	17,6	2,57	
2,11	42,7	30,0	2,55	25,3	16,1	2,55	1 Siemens zu w_2 zugeschaltet.
3,11	61,8	36,5	2,57	28,1	21,3	2,59	

Mittelwerth $np = 2,565$ S., mittlerer Fehler der einzelnen Beobachtung ca. $\frac{1}{2}$ Proc. Um p in absolutem Maass zu erhalten, muss die Zahl mit $10^9 \cdot 0,943/941,2$ multiplicirt werden; es wird also $p = 2,57 \cdot 10^6$ cm.

Die secundäre Rolle eines du Bois'schen Schlittenapparates gab bei einem Widerstand von 251 S. $np = 902,5$, so dass der scheinbare Widerstand bei dieser niedrigen Schwingungszahl schon 937 S. beträgt. Eine Drahtrolle von 0,285 S. hatte einen Selbstinductionscoefficienten $np = 0,122$ S.; mit einem Kern aus dünnem Eisendraht $np = 1,103$ S.

Bei sehr kleinen Ausschlägen, also bei kleiner Selbstinduction und verhältnissmässig grossem begleitendem Widerstande, wird die Bestimmung von ϱ und δ sehr ungenau; man thut dann am besten solche Selbstinductionscoefficienten direct mit anderen grösseren zu vergleichen. Dies geschieht auf folgende Weise: im Nullpunkt ist $\alpha_0 = np/N$. Demnach verhält sich, wenn sonst alles gleich bleibt und nur p im Zweige 1 geändert wird: $p:p' = \alpha_0:\alpha'_0$. Hierbei ist nur darauf zu achten, dass die Widerstände in den Zweigen 3 und 4 gross gegen np sind, damit der Nenner trotz der Aenderung von np merklich denselben Werth beibehält. Da der Voraussetzung nach np klein sein soll, ist dies leicht zu erfüllen. Auf diese Weise ermittelte ich die Aenderung der Selbstinduction einer Rolle beim allmählichen Hineinschieben eines Eisendrahtkerns. Indem auf dem Drahtkern eine Theilung angebracht und eine Tabelle dazu angefertigt wurde, erhielt ich eine Drahtrolle mit bekannter, variabler Selbstinduction, die mir später nützlich wurde. Trotz der sehr niedrigen angewandten Periode lassen sich selbst sehr kleine Selbstinductionscoefficienten in dieser Art messen, z. B. der eines ein paar Mal um eine Bleifeder gewickelten Kupferdrahtes. Auch geradlinige Eisendrähte oder dicke Kupferdrähte zeigen noch merkliche Selbstinduction und hoffe ich hierüber bei höherer Schwingungszahl bald genauere Werthe zu erhalten.

Bei Rollen mit festem Eisenkern erhielt ich ganz falsche Resultate. Es liegt dies daran, dass infolge der in der Eisenmasse selbst entstehenden Ströme der Extrastrom eine Phasenverzögerung erleidet. Oberbeck¹⁾ hat mit Hilfe des Dynamometers und des Sinusinductors diese Phasenverzögerung gemessen und zur genaueren Berechnung der inducirten magnetischen Momente benutzt.

Wenn wir die Phasenverzögerung in die obigen Formeln einführen, so muss bei einem Strom $J = e^{int}$ im Hauptzweig, in dem Ausdruck für die electromotorische Kraft des Extrastroms $p \cdot \partial J / \partial t$ statt $J = e^{int}$, $J = e^{i(nt-\psi)}$ gesetzt werden. Dann wird der Widerstandsoperator $a_1 = w + ipn \cdot e^{-i\psi}$; für den Strom e^{-int} im Hauptzweig $a_1' = w - inpe^{+i\psi}$. Demnach ist für einen Sinusstrom die Intensität im Brücken-zweig ($K = (a_1 a_3 - a_2 a_3) / N$):

$$\alpha^2 = KK' = \frac{\{-\delta(w_1 + w_2) + inpe^{-i\psi}(w_{04} - \delta)\} \{-\delta(w_1 + w_2) - inpe^{+i\psi}(w_{04} - \delta)\}}{N},$$

$$\alpha^2 = \frac{\delta^2(w_1 + w_2)^2 + n^2 p^2 (w_{04} - \delta)^2 - 2np \sin \psi (w_{04} - \delta) \delta (w_1 + w_2)}{N}.$$

α^2 hat wieder die Form:

$$\frac{A\delta^2 - 2B\delta + C}{N}$$

und es folgt aus Gl. (6) p. 606):

$$\rho = \frac{B}{\sqrt{AC - B^2}} = \frac{np + (w_1 + w_2) \sin \psi}{(w_1 + w_2) \cos \psi},$$

$$np = (w_1 + w_2) (\rho \cos \psi - \sin \psi).$$

Aus zwei oder mehreren Paaren von Beobachtungen bei verschiedenem $(w_1 + w_2)$ erhält man ψ nach der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\rho(w_1 + w_2) - \rho'(w_1' + w_2')}{(w_1 + w_2) - (w_1' + w_2')}.$$

Dann bestimmt man durch Einsetzen von ψ in die Gleichung $np = (w_1 + w_2) \{\rho \cos \psi - \sin \psi\}$ aus denselben oder anderen Beobachtungen np .

Nun konnte das hier wichtige Selbstpotential eines Telephons bestimmt werden. Dasselbe besass einen Widerstand von 202,0 S. und ich fand:

$$\operatorname{tg} \psi = 0,190, \quad \psi = 10,8^\circ; \quad np = 121,0, \quad p = 1,213 \cdot 10^8 \text{ cm.}$$

1) Oberbeck, Wied. Ann. 21. p. 672. 1883.

Es ist in den meisten Fällen bequemer ψ für sich auf eine etwas andere Art zu bestimmen.

Bringt man nämlich die Inductionsrolle vorläufig ohne Eisenkern nicht in den Zweig 1, sondern in den Zweig 3 als Zuschaltung zum Brückendraht, so wird der Widerstandsoperator $a_1 = w_1$, $a_2 = w_2$, $a_3 = w_3 + inp$, $a_4 = w_4$ und:

$$\alpha^2 = \frac{\delta^2 (w_1 + w_2)^2 + n^2 p^2 w_2^2}{N}.$$

Aus $\partial \alpha^2 / \partial \delta = 0$ folgt $\delta = 0$: es fällt das Minimum mit dem wahren Nullpunkt zusammen; nebenbei bemerkt, ergibt sich hieraus die Möglichkeit den wahren Widerstand eines Leiters mit Selbstinduction durch Wechselströme zu messen.¹⁾

Wenn nun ein Eisenkern in der Rolle ist, so tritt eine Phasenverzögerung des Extrastromes auf und es wird:

$$\alpha^2 = \frac{\delta^2 (w_1 + w_2)^2 + n^2 p^2 w_2^2 - 2 n p w_2 (w_1 + w_2) \delta \sin \psi}{N},$$

$$\frac{\partial \alpha^2}{\partial \delta} = 2 \delta (w_1 + w_2)^2 - 2 n p w_2 (w_1 + w_2) \sin \psi = 0,$$

$$\delta_1 = \frac{B}{A} = \frac{w_2 \cdot n p \cdot \sin \psi}{w_1 + w_2}, \quad \rho = \operatorname{tg} \psi.$$

Es fällt also hier nicht Nullpunkt und Minimum zusammen.

Daraus ergibt sich erstens ein Mittel, um das Vorhandensein einer Phasendifferenz (bei Rollen mit Drahtkern) zu erkennen, und zweitens diese Phasendifferenz genau zu messen, da sie unabhängig von den Widerständen in den vier Zweigen nur von dem Verhältniss der Ausschläge im Minimum und Nullpunkt abhängt. Durch Variiren der vier Widerstände kann man demnach beliebig viele unabhängige Werthe für ψ erhalten.

Auf diese Weise wurde für eine Rolle mit Eisenkern $\operatorname{tg} \psi = 0,465$ $\psi = 25^\circ$ bestimmt; mit einem Kern von Eisen-

1) Widerstände mit Selbstinduction lassen sich auch bei der gewöhnlichen Anordnung der Wheatstone'schen Brücke mit dem optischen oder mit dem Hörtelefon messen, wenn man einen constanten Strom durch das System schiebt und den Brückenzweig durch eine Stimmgabel oder Saite unterbricht. Das Telefon kann sowohl direct, als mit Hülfe eines Inductoriums (vgl. p. 602) eingeschaltet werden. In dem wahren Nullpunkt werden Ton und Ausschlag zu Null.

draht von einem Durchmesser von 2 mm $\psi = 10,5^\circ$. Je dünner der Eisendraht und je kürzer die Rolle, desto kleiner ist ψ . Bei einer Rolle von 8 cm Länge und 3 cm Durchmesser mit einem Drahtkern von feinstem Blumendraht war keine Phasendifferenz mehr nachzuweisen.

Die eben abgeleiteten Formeln stimmen deshalb nicht ganz genau, weil der von der Rolle selbst herrührende Theil des Extrastromes ohne Phasendifferenz verläuft. Dieser Theil wird im allgemeinen nur klein sein und daher der Fehler auch nur klein, sodass für die Praxis die Formeln ausreichen dürften. Oberbeck¹⁾ trennt die beiden Theile des Extrastromes und bestimmt den von dem Magnet selbst herrührenden Theil für sich, wodurch er den inducirten Magnetismus erhält. Thun wir dies auch, so erhalten wir folgende Gleichungen. Der Werth von δ_1 bleibt ähnlich:

$$\delta_1 = \frac{M n \cdot \sin \psi \cdot \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}, \quad \varrho = \frac{M \sin \psi}{p + M \cos \psi}.$$

Hierin hat M dieselbe Bedeutung, wie bei Oberbeck; mit der Stromintensität multiplicirt ist es das electromagnetische Potential des Eisenkernes in Bezug auf die Rolle und kann daher M als Maass des inducirten Magnetismus gelten. Wenn p , das Selbstpotential der Rolle ohne Eisenkern, vorher für sich bestimmt ist, kann M und ψ aus ein oder mehreren Beobachtungen mittelst obiger Gleichungen berechnet werden.

Messung von Flüssigkeitswiderständen und Polarisation bei Wechselströmen.

Geht ein Wechselstrom durch eine Flüssigkeitszelle, so entsteht infolge der Polarisation an den Electroden eine neue periodische electromotorische Kraft e . Ueber diese electromotorische Kraft macht F. Kohlrausch²⁾ die Annahme, dass sie proportional der jedesmaligen Belegung der Electroden sei, also proportional der Electricitätsmenge, welche seit dem Zeichenwechsel des primären Stromes durch die Zelle hindurchgegangen ist. Indem er nun c die Capacität der Elec-

1) Oberbeck, l. c. p. 675.

2) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 148. p. 153. 1873.

troden nennt, d. h. das Reciproke des Potentials, zu welchem sie durch die Electricitätsmenge 1 geladen werden, erhält er:

$$e = \frac{1}{c} \int J dt.$$

$$\text{Für } J = \sin nt: \quad e = -\frac{1}{nc} \cos \left(nt - \frac{\pi}{2} \right).$$

Es ist also jedem Sinusstrom, der durch eine Flüssigkeitszelle geht, ein anderer entgegengesetzt gerichtet, der mit dem ersten eine Phasendifferenz von $\frac{1}{2}\pi$ hat und dessen Amplitude umgekehrt proportional der Electrodenfläche und der Schwingungszahl ist.

Es müssen wieder die Formeln für die Wheatstone'sche Brücke abgeleitet werden: Ist im Hauptzweig $J = e^{int}$, so ist die electromotorische Kraft einer Flüssigkeitszelle, durch welche der Strom geht:

$$\frac{1}{c} \int J dt = \frac{1}{inc} e^{int}.$$

Daraus folgt der Widerstandsoperator des Zweiges 1, in welchem die Zelle sich befinden soll:

$$a_1 = w + \frac{1}{inc}, \quad a_2 = w_2, \quad a_3 = w_3, \quad a_4 = w_4.$$

Die Amplitude α im Brückenweig, wenn ein einfacher Sinusstrom durch das System hindurchgeht, ergibt sich, wie gewöhnlich mit Hülfe der Gleichung $K = (a_1 a_4 - a_2 a_3)/N$ berechnet, als:

$$\alpha^2 = \frac{\delta^2 (w_1 + w_3)^2 + \frac{(w_{04} - \delta)^2}{n^2 c^2}}{N}.$$

Der Ausdruck hat genau dieselbe Form, wie oben für eine Inductionsrolle im Zweige 1, nur dass überall für np $1/nc$ zu setzen ist. Demnach ergibt sich für den Ausschlag im Minimum:

$$\alpha^2 = \frac{w_{04}^2 (w_1 + w_3)^2}{N \{1 + n^2 c^2 (w_1 + w_3)^2\}},$$

und für die Abweichung des Nullpunktes vom Minimum:

$$\delta_1 = \frac{w_{04}}{1 + n^2 c^2 (w_1 + w_3)^2}.$$

Es folgen hieraus zwei Fehler bei der Messung von Flüssigkeitswiderständen mit Dynamometer oder Hörtelephon;

ein Einstellungsfehler, weil man auf das Minimum schlecht einstellen kann, und ein principieller Fehler δ_1 .

Da $(w_1 + w_2)$ im Nenner quadratisch vorkommt, so sind offenbar diese Fehler nur gross für Flüssigkeiten mit geringem Widerstande. F. Kohlrausch hat beide Fehler verkleinert, indem er grosse platinirte Electroden anwandte, wodurch c vergrössert wird, und indem er die Schwingungszahl möglichst hoch wählte. Zugleich hat er jedoch ein Mittel angegeben, bei Sinusströmen die Fehler a priori zu vermeiden, nämlich durch Hinzufügung einer Inductionsrolle in demselben Zweige. Es wird dann der Widerstandsoperator des Zweiges 1:

$$a_1 = w_1 + inp + \frac{1}{inc}.$$

Hieraus immer in derselben Weise berechnet:

$$\alpha^2 = \frac{\delta^2 (w_1 + w_2)^2 + \left(np - \frac{1}{nc}\right)^2 (w_{01} - \delta)^2}{N}.$$

Für $np = 1/c$ fällt das zweite Glied des Zählers fort, wir erhalten $\alpha^2 = \delta^2 (w_1 + w_2)^2 / N$, wie wenn weder Selbstinduction, noch Polarisation in dem Zweige 1 wäre; $\alpha = 0$ für $\delta = 0$, d. h. im wahren Nullpunkt wird der Ausschlag gleich Null.

Die Erscheinung wird physikalisch durch beifolgende schon von F. Kohlrausch gegebene Zeichnung klarer; darin bedeutet — den primären Strom, den Polarisationsstrom, — den Selbstinductionsstrom. Es ist augenscheinlich, dass die beiden letzten Ströme sich bei gleicher Amplitude aufheben müssen.

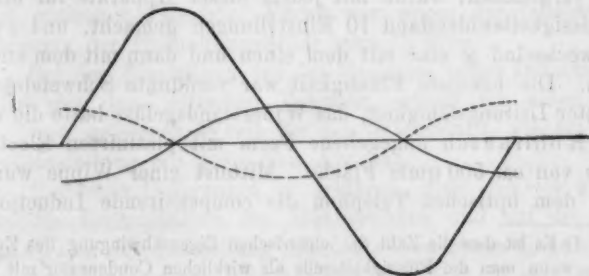


Fig. 5.

F. Kohlrausch selbst hat dieses Mittel nicht benutzt, offenbar wegen der Schwierigkeit, die Rotation des Sinus-inductors, also n , constant zu erhalten. Denn es wird $np - 1/nc$ nur für eine bestimmte Periode $n = 1/\sqrt{pc}$ ¹⁾ zu Null; für alle anderen ist $np \geq 1/nc$ und bei geringen Aenderungen der Rotationsgeschwindigkeit wird die Bestimmung des Nullpunktes mit dem Dynamometer sehr unsicher. Aus demselben Grunde kann man dasselbe Mittel beim Hörtelefon nicht anwenden, da die höheren Obertöne infolge der Selbstinduction so verstärkt werden, dass man, obgleich der Grundton verschwindet, überhaupt kein Minimum des Gesamtklanges mehr herauszu finden im Stande ist.

Hingegen reagirt das optische Telefon nur auf eine einzige Sinusschwingung, infolgedessen gelingt es leicht, den Ausschlag zu Null zu machen, wenn man in einer Inductionsrolle einen Kern aus dünnem Eisendraht verschiebt. Da auch bei starker Polarisirung und demgemäss starker Selbstinduction der Ausschlag vollkommen zu Null wird, wie beim Oeffnen des Stromes, so ist dies ein scharfer Beweis dafür, dass die Ströme höherer Schwingungszahl für das optische Telefon zu vernachlässigen sind, und es merklich nur auf eine bestimmte Sinusschwingung reagirt (p. 599).

Da man sowohl den Widerstand, als auch die Selbstinduction bei der Nulleinstellung variiren muss, so ist dieselbe nur durch Näherung möglich, jedoch ist dies leicht zu machen, besonders, wenn die Polarisirung nicht allzu stark ist.

Um die Genauigkeit der Messung von Flüssigkeitswiderständen mit dem Hörtelefon und dem optischen Telefon zu vergleichen, wurde mit jedem dieser Apparate für einen Flüssigkeitswiderstand 10 Einstellungen gemacht, und zwar abwechselnd je eine mit dem einen und dann mit dem anderen. Die benutzte Flüssigkeit war verdünnte Schwefelsäure bester Leitungsfähigkeit, das Widerstandsgefäss hatte die von F. Kohlrausch angegebene Form mit platinirten Electroden von ca. 500 qmm Fläche. Mittelst einer Wippe wurde bei dem optischen Telefon die compensirende Inductions-

1) Es ist dies die Zahl der electricischen Eigenschwingung des Zweiges, wenn man die Flüssigkeitszelle als wirklichen Condensator mit der Capacität c auffasst. Vgl. Mascart-Joubert, 2. p. 441.

rolle, bei dem Hörtelephon ein derselben gleicher inductionsloser Widerstand eingeschaltet. Ich erhielt folgende Einstellungen:

Hörtelephon		Optisches Telephon	
cm	Δ	cm	Δ
Brückendraht	in mm	Brückendraht	in mm
48,5	7,0	51,5	0,8
49,8	4,0	51,4	0,2
49,8	6,0	51,4	0,2
50,5	13,0	51,5	0,8
49,5	3,0	51,4	0,2
48,2	10,0	51,3	1,2
49,4	2,0	51,4	0,2
48,5	7,0	51,4	0,2
50,5	8,0	51,4	0,2
48,7	5,0	51,5	0,8
491,9	65,0	514,2	4,8

Da zu dem Brückendraht von 1,92 S. Widerstand 10 Siemens hinzugefügt waren, so ergibt sich ein mittlerer Einstellungsfehler für das optische Telephon von 0,018 Proc., für das Hörtelephon von 0,25 Proc., wobei beide Werthe durch geringe Schwankungen der Temperatur, während der 10 Minuten, die zu sämtlichen Einstellungen gebraucht wurden, etwas vergrößert sein können.

Sehr auffallend ist die Differenz zwischen dem Mittel der Einstellungen beider Apparate, welche für den Widerstand einen um über $\frac{1}{2}$ Proc. verschiedenen Werth ergeben. Und zwar ist, im Gegensatz zu den oben abgeleiteten Formeln, welche verlangen, dass die Einstellung auf das Minimum mit dem Hörtelephon einen grösseren Widerstand ergeben soll, gerade dieser der kleinere. Ich hoffe diese Differenz weiter unten genügend zu erklären. Mit dem Dynamometer erhielt ich ungefähr denselben Werth, wie mit dem optischen Telephon, jedoch war wegen der langsamen Ablesung der Einstellungsfehler etwa $\frac{1}{2}$ Proc.

Bei der Einstellung auf das Minimum (ohne Inductionsrolle) mit dem optischen Telephon erhielt ich einen um $\frac{1}{10}$ Proc. grösseren Werth für den Widerstand, wie bei der Nulleinstellung mit demselben Apparat.

Um diese Differenzen zu erklären, muss ich vor allem auf die Eigenschaften des Hörtelephons und auf die Art und Weise der Einstellung mit demselben etwas eingehen.

Der Strom eines Inductoriums lässt sich in eine Reihe

von Sinusströmen zerlegen (p. 599). Das Hörtelephon reagiert auf alle diese Schwingungen, im allgemeinen auf die höheren besser als auf die tieferen, ganz besonders stark aber auf die sehr hohen Töne, welche bei der Stromunterbrechung durch die electrischen Eigenschwingungen des Systems hervorgerufen werden. Lenard¹⁾ bezeichnet dieselben als das Telephongeräusch und taxirt ihre Schwingungszahl auf ca. 10000 in der Secunde. Man darf deshalb niemals mit einem Hörtelephon Einstellungen machen, welche von der Periode des Wechselstroms abhängig sind und vor allen Dingen nicht die Periode der Unterbrechung als die richtige ansehen. Dieser Fall tritt ein, wenn in einem Zweige der Brücke sich eine Flüssigkeitszelle befindet oder derselbe eine merkliche Capacität oder Selbstinduction hat. Was die Wirkung der Polarisirung anbelangt, so ist infolge derselben, wie oben abgeleitet, $\delta_1 = w_{04}/1 + n^2 c^2 (w_1 + w_2)^2$, also die Einstellung von n abhängig. Für jedes n entsteht ein Minimum. Diese Minima liegen alle nebeneinander auf dem Brückendraht und zwar die der höheren Töne dicht bei einander, die der tieferen in grösseren Abständen. Bei einigermaßen geschultem Ohr kann man die Aenderung der Klangfarbe um das Minimum heraushören.

Die Einstellung erfolgt im allgemeinen allein auf das Minimum des Telephongeräusches, also der ganz hohen Töne, da dieselben stärker und hervortretender sind, als die weichen, tiefen Töne. Es ist die Einstellung auch etwas von der Art und Weise der Unterbrechung abhängig, da die Form der Stromcurve, also das Verhältniss der verschiedenen Amplituden davon abhängt; jedoch ist die Aenderung der Tonhöhe der Unterbrechung ohne merklichen Einfluss.

Infolge dieser Einstellung auf ganz hohe Töne ist der durch die Polarisirung verursachte Fehler verschwindend, da hierbei δ_1 mit dem Wachsen der Schwingungszahl stark abnimmt; nur dass die Einstellung wegen des verwaschenen Minimums ungenau wird.

1) Lenard, Wied. Ann. 39. p. 619. 1890. Diese Arbeit bestätigt die hier ausgesprochene Ansicht über das Bedenkliche der Widerstandsmessung mit dem Hörtelephon.

Dagegen ist Selbstinduction oder Capacität äusserst gefährlich, da hierbei δ mit dem Quadrat der Tonhöhe zunimmt. Nun ist bei der Widerstandsmessung in dem einen Zweig die Flüssigkeit, in dem anderen Drahtwiderstände. Die Flüssigkeit hat jedenfalls keine merkliche Selbstinduction, hingegen hat sie eine condensatorartige Wirkung, da mehrere verschieden leitende Schichten hintereinander vorkommen (Metall, Oberflächenschicht mit Gas, Flüssigkeit). Wie klein ihr Einfluss auch sein mag, jedenfalls hat sie die Wirkung, dass der Widerstand der Flüssigkeit, wie immer durch Condensatoren, bei Wechselströmen verkleinert erscheint.

Die Drahtwiderstände im anderen Zweig sind zwar bifilar gewickelt, dennoch ist die Selbstinduction nie ganz zu vermeiden und bei den sehr hohen Schwingungen des Hörtelephons dürfte sie jedenfalls schon von merklicher Wirkung sein. Hierzu tritt die Vergrösserung des Widerstandes von Drähten bei schnellen Wechselströmen, welche von der ungleichen Stromdichte innerhalb desselben Querschnitts des Drahtes herrührt.¹⁾

Infolge der Selbstinduction erscheinen die Drahtwiderstände zu gross. Capacität in dem einen Zweig, Selbstinduction in dem anderen bewirken also zusammen, dass die Einstellung auf das Geräuschminimum des Telephons für Flüssigkeiten einen zu kleinen Widerstand ergibt.

Wie gross dieser Fehler ist, lässt sich schwer untersuchen, weil bei irgend grösserer Polarisation oder Selbstinduction es überhaupt nicht mehr möglich ist, ein Minimum mit dem Hörtelephon zu finden.

Indem ich nun zum optischen Telephon übergehe, bemerke ich, dass das Dynamometer mit Sinusinductor als Stromquelle dieselben Fehler hat, wie das optische Telephon, wenn man damit ohne compensirende Rolle auf das Minimum einstellt, weil beide Apparate mit Sinusströmen niedriger Periode arbeiten. Diese Einstellung auf das Minimum zeigt immer einen etwas grösseren Widerstand der Flüssigkeit an als die Nulleinstellung, wie es sich auch aus der Theorie ergibt $[\delta_1 = w_0 / (1 + n^2 c^2 (w_1 + w_2)^2)]$. —

1) Rayleigh, Phil. Trans. 21. p. 381. 1886.

Bei Untersuchungen über Polarisation zeigte sich, dass auch die Nulleinstellung mit einem, wenn auch im allgemeinen kleinen Fehler behaftet ist.

Die Grösse der Polarisation ergibt sich bei der Nulleinstellung direct aus der Grösse der compensirenden Selbstinduction ($np = 1/nc$). Diese wiederum war, wie oben erwähnt, für jede Stellung des Drahtkernes bei der benutzten Rolle bekannt.

Besonders genau liess sich jede Aenderung der Polarisation constatiren, da man dann durch blosser Widerstandsänderung nicht mehr Null, sondern nur ein Minimum erhielt. Um den Ausschlag wieder zu Null zu machen, musste dann auch die Selbstinduction geändert werden.

Leider habe ich bis jetzt so inconstante und unübersichtliche Resultate hierüber erhalten, dass ich noch keine Zahlenangaben machen kann; ich hoffe jedoch durch etwas geänderte Versuchsanordnung und besonders durch Anwendung verschiedener Tönhöhen zu besseren Resultaten zu kommen.

Qualitativ kann ich mittheilen, dass die Polarisation nicht nur von dem Metall und der Grösse der Electroden, ihrer Oberflächenbeschaffenheit und von der chemischen Zusammensetzung des gelösten Körpers abhängt, sondern dieselbe auch mit steigender Temperatur und Concentration abnimmt und auch etwas von der Entfernung der Electroden voneinander abhängig ist.

Die Schwierigkeit dieser Untersuchung beruht besonders auf einer Fehlerquelle, die sich nur schwer vermeiden lässt. Es ist nämlich die Phasendifferenz zwischen dem primären und dem Polarisationsstrom nicht immer, wie Kohlrausch annimmt, gleich $\frac{1}{2}\pi$, sondern dieselbe ist oft geringer. Inwiefern hier die von Mengarini¹⁾ bei der Electrolyse durch Wechselstrom beobachteten Erscheinungen mitsprechen, kann ich noch nicht übersehen.

Bei der Messung von Flüssigkeitswiderständen ist diese Abweichung der Phasendifferenz von $\frac{1}{2}\pi$ deshalb wichtig, weil man trotzdem durch Hinzufügung eines geeigneten Selbstinductionscoëfficienten den Ausschlag zu Null machen kann. Jedoch fällt dieser Nullpunkt nicht mit dem wahren Null-

punkt zusammen, sondern der Flüssigkeitswiderstand erscheint zu gross. Bei grossen platinirten Electroden ist die Abweichung der Phasendifferenz von $\frac{1}{2}\pi$ sehr gering, ausserdem c gross, weshalb δ bei dem oben angewandten Kohlrausch'schen Widerstandsgefäss 0,1 Proc. keinesfalls übersteigt, sodass sich hiermit mit einiger Sicherheit Flüssigkeitswiderstände messen lassen.

Um zum Schluss ein Beispiel einer exacten Widerstandsmessung zu geben, wurde die Leitungsfähigkeit verdünnter Schwefelsäure zwischen 1,200 und 1,250 spec. Gew. bestimmt, also um die beste Leitungsfähigkeit herum. Es wurden in diesem Bereiche 25 Punkte ermittelt, während Kohlrausch darin nur die Leitungsfähigkeit für 1,224 spec. Gew. = 691,4 angibt. Die Tabelle an sich hat wohl wenig Zweck, es soll damit nur die Genauigkeit der Methode dargelegt werden.

Die verschiedenen Flüssigkeiten wurden hergestellt, indem von einer Mischung von 1,250 spec. Gew. vorher berechnete Mengen mittelst Pipetten mit einer leichteren Mischung vertauscht wurden, sodass nachher die Mischung 1,248 ... 1,246 u. s. w. spec. Gew. hatte. Zur Controle wurden häufig Pyknometerwägungen gemacht.

Wegen des grossen Temperaturcoefficienten war es nothwendig, auf die Temperatur besonders Acht zu geben. Die ganze Beobachtungsreihe wurde an einem Tage gemacht, bei einer Zimmertemperatur von ca. $17,5^{\circ}$ C., welche möglichst constant gehalten wurde. Das Widerstandsgefäss befand sich in einem Wasserbade und wurde jedesmal 10 — 15 Minuten darin gelassen, bevor die Widerstandsmessung vorgenommen wurde. Ein Thermometer war so in das Wasser gesenkt, dass das Quecksilbergfäss sich unmittelbar neben der Widerstandsröhre befand. Durch die Freundlichkeit des Hrn. Dr. Scheel war das Thermometer in dem Kgl. Aichungsamt mit einem Wasserstoffthermometer aus dem internationalen Bureau in Paris verglichen worden. Der Temperaturcoefficient wurde für drei Flüssigkeiten von 1,200, 1,225 und 1,250

1) Mengarini, *Electrolisi colle correnti alternanti*. Academia dei Lincei. Roma 1890.

spec. Gew. in dem Intervall von $16 - 19^{\circ}$ C. bestimmt als 1,55, 1,64, 1,72 Proc. für 1° C.

Da die Widerstände der benutzten Rheostaten auf $\frac{1}{100}$ Proc. übereinstimmten, wurden sie als richtig angenommen und nur die Temperaturcorrection gemacht. — Die Polarisation war, wie erwähnt, sehr gering und für alle Flüssigkeiten ziemlich constant, sodass auch nur ein constanter Fehler entstehen konnte. Bei der gleich zu beschreibenden Bestimmung der absoluten Leitungsfähigkeit fiel derselbe wegen des grossen Widerstandes in den Zweigen 1 und 2 so gut wie ganz fort, sodass in der ganzen Tabelle der Fehler durch Polarisation verschwindend ist.

Die absolute Leitungsfähigkeit wurde für die am besten leitende Mischung in der Weise ermittelt, dass der Widerstand derselben in einer dünnen Glasröhre bestimmt wurde, deren Länge genau gemessen und deren Querschnitt durch Quecksilberwägungen festgestellt war. Der benutzte Maassstab wurde mit einem Normalmeter verglichen und das Quecksilber hatte ein spec. Gew. von 13,588. Der Querschnitt ergab sich aus fünf Wägungen als: $2,870 \pm 0,0015$ qmm.

An beiden Enden der Röhre wurden ähnlich wie bei Kohlrausch zwei weite Glasgefässe angebracht, in die zwei grosse, platinirte Platinelectroden eintauchten. Für eine Länge von 368,3 mm und 18° C. ergab sich ein Widerstand von 1855,6 S., also eine Leitungsfähigkeit = 691,6. Eine zweite Bestimmung mit einer Röhre von 3,72 qmm Querschnitt ergab 692,2. Hieraus das Mittel 691,9, welche Zahl bis auf 0,1 Proc. sicher ist. Hierauf reducirt, erhielt ich folgende Tabelle, in welcher die erste Columne das berechnete specifische Gewicht angibt, die zweite die Controlwägungen mit dem Pyknometer, die dritte die Temperatur, die vierte die abgelesenen Theilstriche des Brückendrahtes, die fünfte die auf 18° C. reducirten Theilstriche und die sechste die Leitungsfähigkeit. In den Zweigen 1 und 2 der Brücke befanden sich ca. 22 S. Der Brückendraht hatte 1,92 S. Widerstand und waren auf beiden Seiten je 10 S. hinzugefügt.

Leitungsfähigkeit von verdünnter Schwefelsäure
zwischen 1,200 und 1,250 spec. Gew.

Sp. Gew.	Pykn. W.	Temp.	Theilstr.	Corr. Theilstr.	Leitungs- fähigkeit
1,200	1,2003	17,32° C.	53,80	56,85	684,6
1,202	—	17,31	54,25	57,85	685,8
1,204	—	17,28	54,50	57,73	686,7
1,206	—	17,30	55,00	58,15	687,7
1,208	—	17,32	55,40	58,50	688,5
1,210	1,2102	17,39	55,95	58,76	689,1
1,212	—	17,39	56,20	59,00	689,8
1,214	—	17,37	56,35	59,25	690,4
1,216	—	17,33	56,35	59,44	690,7
1,218	—	17,30	56,35	59,57	691,0
1,220	—	17,29	56,45	59,75	691,4
1,222	—	17,28	56,40	59,85	691,7
1,224	1,2241	17,30	56,65	59,95	691,9
1,226	—	17,27	53,55	59,92	691,8
1,228	—	17,21	56,10	59,81	691,5
1,230	—	17,19	56,00	59,80	691,5
1,232	—	17,15	55,70	59,70	691,3
1,234	1,2340	17,13	55,45	59,57	691,0
1,236	—	17,14	55,25	59,35	690,5
1,238	—	17,13	55,00	59,17	690,1
1,240	—	17,24	55,40	59,02	690,0
1,242	—	17,21	55,00	58,87	689,4
1,244	1,2441	17,30	55,05	58,58	688,7
1,246	—	17,18	54,10	58,15	687,7
1,248	—	17,13	53,45	57,75	686,8
1,250	1,2498	17,11	52,95	57,32	685,8

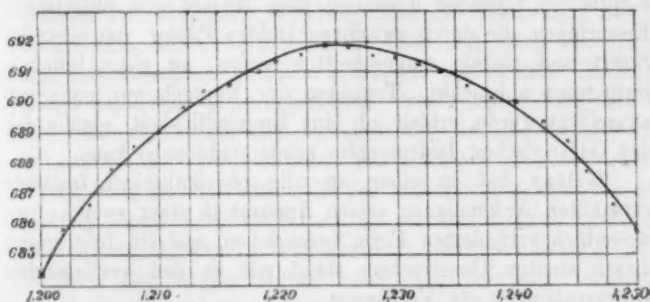


Fig. 6.

Fig. 6 zeigt, dass die Punkte im allgemeinen der Curve sehr nahe liegen; die Abweichungen sind vermuthlich eine Folge der Temperaturschwankungen.

Phys. Inst. der Univ. Berlin, Dec. 1890.

VIII. Ueber mikrophonische Tonstärkemessung; von Georg Stern.

(Auszug des Herrn Verfassers aus seiner Inaugural-Dissertation.¹⁾)

1. Frühere Versuche, telephonische Ströme zu messen, scheiterten an der Unempfindlichkeit der damals gebräuchlichen Dynamometer. Die letzte Arbeit ist in dieser Beziehung die von Oberbeck²⁾ veröffentlichte. Inzwischen ist von Giltay³⁾ auf Grund eines von Bellati⁴⁾ angegebenen Principes ein empfindliches Dynamometer construirt worden. Die bewegliche Drahtspule des Weber'schen Instrumentes wird hier vertreten durch ein Bündel weicher Eisenstäbe, welches durch den zu messenden Strom magnetisirt und gedreht wird. — Es ist mir übrigens wahrscheinlich, dass man zu einem noch empfindlicheren Instrumente bei anderer Form des Eisenkörpers und der Windungsöffnung kommen könnte. So habe ich ein Kohlrausch'sches⁵⁾ Dynamometer zu einem Bellati'schen dadurch umgewandelt, dass ich in dem elliptischen Cylinder desselben eine Anzahl von elliptischen Eisenringen, die durch zwischengeklebtes Papier von einander isolirt und einzeln aufgeschnitten waren, an einer bifilaren Suspension anbrachte. Trotzdem der Versuch nur ganz roh ausgeführt wurde, erhielt ich eine Empfindlichkeit, welche der des Giltay'schen Instrumentes schon recht nahe kam.

Giltay hat in einer an alle physikalischen Institute versandten Ankündigung seinen Apparat in einer zweiten, unwesentlich veränderten Form beschrieben, und ein Instrument dieser zweiten Construction stand mir zu den vorliegenden Untersuchungen zur Verfügung.

1) G. Stern, Ueber mikrophonische Tonstärkemessung. Königsberger Inaug.-Diss. Leipzig, Ambrosius Barth, 1890.

2) A. Oberbeck, Wied. Ann. 13. p. 222. 1861.

3) J. W. Giltay, Wied. Ann. 25. p. 325. 1885.

4) Bellati, Atti del. R. Ist. Ven. (6) p. 563. 1883. Beibl. 7. p. 617.

5) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 18. p. 556. 1882.

Die Angaben über die Leistungsfähigkeit dieses neueren Apparates, wie sie in jener Ankündigung gemacht waren, nach denen die Empfindlichkeit des älteren noch weit übertroffen sein sollte, fand ich nicht ganz bestätigt, auch dann nicht, als ich die dort aufgeführten Versuche ohne Flüssigkeitsdämpfung wiederholte. Ich erhöhte jedoch die Empfindlichkeit noch in wesentlichem Maasse durch Verlängerung der Aufhängefäden und -röhre, wobei ich freilich auf den Vortheil einer kurzen Schwingungsdauer verzichten musste, sowie durch definitives Aufgeben der Dämpfung. Als Beweis für die überaus leichte Beweglichkeit des schwingenden Theiles mag gelten, dass häufig, wenn der Apparat ohne Hülle stand, er auf einen aus grösserer Entfernung laut gesungenen Ton wie ein Grimsehl'sches¹⁾ Phonometer reagirte, dass also die Spiegelfläche sich senkrecht zur Bewegungsrichtung der Luft zu stellen strebte. — Auf die Constanz der Ruhelage haben, wie schon Giltay bemerkte, Temperaturänderungen grossen Einfluss. Eine Annäherung der Handfläche an die Glasröhre bewirkte eine augenblickliche Verschiebung des Nullpunktes um einige Centimeter, ja selbst nachdem ein Pappcylinder den Apparat verdeckte, konnte man bequem kleine Schwankungen der Zimmertemperatur an der Bewegung des Spiegels bemerken. Erst nachdem ein Pappcylinder mit doppelter Wandung über das Instrument gesetzt war, konnte diese Störung als beseitigt angesehen werden. — Die Entfernung der Scala vom Spiegel betrug 3900 Scalenth. und 1 Scalenth. entsprach 1 mm. Nach Ausschlägen bis zu 300 Scalenth. stellte sich stets die alte Ruhelage wieder ein; bei stärkeren Wechselströmen war mitunter eine bedeutende Verrückung zu constatiren, die ich anfänglich, gemäss der von Giltay abgegebenen Erklärung, als verursacht durch im Eisenbündel zurückbleibenden Magnetismus ansehen zu müssen glaubte. Spätere Erfahrungen haben mich aber überzeugt, dass bei nicht allzu kräftigen Wechselströmen von dieser Seite keine Störungen zu befürchten sind, dass vielmehr jene Variation des Nullpunkts sich ungezwungener aus der losen Aufhängung der Drehungsaxe in der Bifilarsuspension herleiten lässt. Um allzugrosse Drehungswinkel oder gar Umschlagen des Bündels

1) E. Grimsehl, Wied. Ann. 34. p. 1082. 1888.

zu verhindern, wurde daher eine einfache Arretirung angebracht mittelst eines über den senkrecht zur Drehungsaxe befindlichen, sich mitbewegenden Aluminiumzeiger gesetzten, ausgeschnittenen Korkes.

Während ich mit den vorliegenden Untersuchungen beschäftigt war, erschien eine eingehende theoretische und experimentelle Abhandlung über dieses Dynamometer von Behn-Eschenbach ¹⁾, deren Resultate mit meinen Erfahrungen nicht ganz übereinzustimmen scheinen.

Einmal ist wohl die Empfindlichkeit meines Apparates eine beträchtlich grössere, als des von Behn-Eschenbach benutzten, da ich mit ihm Ströme von der Ordnung 10^{-8} cm^{1/2} g^{1/2} sec⁻¹ nachweisen kann, wie später gezeigt werden wird. Damit ist wohl auch die äusserste Grenze erreicht, bis zu der man die Empfindlichkeit des Instruments treiben kann; denn bei noch schwächeren Strömen würden die durch die Bewegung des Eisenkörpers in die Windungen rückwärts inducirten Ströme die Grössenordnung der primären Ströme nahezu erreichen und so jede Messung unmöglich machen. Nun zeigen die theoretischen Untersuchungen von Behn-Eschenbach, dass bei der einfachsten Form eines Wechselstromes die Ablenkungswinkel nicht einfach dem Quadrate der Intensität proportional sind, sondern es tritt noch die 4. Potenz von i in eine Constante multiplicirt additiv zu dem Ausdrucke hinzu. In den Beobachtungen des genannten Autors lässt sich auch der Einfluss dieses Gliedes erkennen, jedoch braucht man es wohl kaum zu berücksichtigen, sobald man sich auf kleinere Drehungswinkel beschränkt, als sie in jener Arbeit benutzt sind. Aus den dort gemachten Angaben berechnet sich der Winkelwerth eines Scalentheiles zu 51'', während bei mir ein Scalth. = 26''. In den Tabellen findet sich nur einmal ein Ausschlagwinkel von 43' beobachtet, sonst stets Winkel > 1°22', ja sogar bis zu 7°. Da ich mich bei Messungen auf Ausschläge bis zu 200 Scalenth. beschränkte, also auf Winkel von höchstens 1°27', und stärkere Ströme mittelst Verzweigungen maass, so wird in diesen Grenzen jene einfache Beziehung als bestehend angenommen werden können. — Mit Ge-

1) H. Behn-Eschenbach, Beibl. 14. p. 61. 1890.

nauigkeit lassen sich nur Ströme gleicher Schwingungszahl und Stromform unmittelbar miteinander vergleichen, was in meinem Falle eine nothwendige Einschränkung der auf diesem Wege zu erledigenden acustischen Fragen zur Folge hat. Wenn man ferner auch auf absolute Messungen verzichten muss, so wird das Eisen-electrodynamometer für Intensitätsvergleichen und Schätzungen von Grössenordnungen sicherlich brauchbares leisten; es wird wohl auch sicherlich die Fehlergrenze bei meinen relativen Messungen eine engere sein, als Behn-Eschenbach sie annimmt. Denn die Gründe für die Ungenauigkeiten der Beobachtungen formulirt Behn-Eschenbach wesentlich dahin, dass einmal der Temperaturwechsel die Torsion der bifilaren Aufhängung ändere, dass remanente Magnetismen die erdmagnetische Richtkraft beeinflussten, dass ferner die Ruhelage sehr veränderlich und meist im Sinne der vorhergegangenen Ablenkung abzuweichen bestrebt sei, und schliesslich die Dämpfungsfähigkeit in Folge von Verdunstung und Bläschenbildung Störungen verursache. — Wie man den Temperatureinfluss eliminiren kann, habe ich schon gesagt, ebenso, dass bei schwachen Wechselströmen, wie ich sie allein benutzte, kein magnetischer Rückstand zu befürchten sei; die Aenderung der Nulllage ist bei so grossen Drehungswinkeln, wie sie Behn-Eschenbach beobachtete, aus früher angegebenen Gründen nicht auffällig und lässt sich durch Anlegung einer Verzweigung für stärkere Ströme vermeiden. Ich habe auch nicht bestätigen können, dass die Ruhelage „oft im Verlauf von wenigen Stunden sich um ein paar Bogengrade änderte“; häufig blieb die Ruhelage mehrere Tage hindurch vollständig constant und nie betrug die Verschiebung mehr als 20 Scalenth. = 9 Bogenminuten von Tag zu Tage, ausser wenn Erschütterungen oder sonstige störende Einflüsse wirksam waren. Da ich schliesslich von der Dämpfung keinen Gebrauch machte, kommt auch diese Fehlerquelle für meine Beobachtungen in Abzug.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich mit Nothwendigkeit, dass der Kreis der acustischen Fragen, die man auf dem Wege der Verwandlung acustischer Schwingungen in electriche erledigen will, durch die Natur dieses einzig dazu verwendbaren strommessenden Apparates eng umgrenzt ist. Absolute Messungen sind ausgeschlossen, ebenso lassen sich relative

Messungen der Stärke von Tönen verschiedener Schwingungszahl ohne Weiteres nicht ausführen, wohl aber kann die Frage nach der Schallvertheilung im Raume gelöst werden, da man hierbei nur die Intensität der Luftbewegungen, die durch einen bestimmten Ton erregt sind, an verschiedenen Stellen des betreffenden Raumes zu vergleichen hat. In erster Reihe wird also eine Bestimmung der Maxima und Minima, die durch Interferenz verschiedener Wellenzüge entstehen, möglich sein nach Lage und Intensitätsverhältniss; nach dieser Richtung habe ich hauptsächlich die Methode auszubilden gesucht.

2. Bei den meisten Versuchen bediente ich mich offener Holzpfeifen, die der Reihe nach die Partialtöne eines tiefen Grundtones angaben. Um aber eine stetige Tonreihe zur Verfügung zu haben, wie später gezeigt werden wird, häufig ganz geringe Aenderungen der Tonhöhe vorgenommen werden mussten, wurden über die hauptsächlich benutzten, dünnwandigen Pfeifen verschiebbare Zinkhülsen gestreift, sodass ich jede beliebige Tonhöhe mir verschaffen konnte. Gespeist wurden die Pfeifen, die tieferen durch zwei, die höheren durch ein Wasserstrahlgebläse, das an die Wasserleitung angeschlossen wurde. Nun hängt die Constanz der Tonstärke und -höhe, auf die es mir wesentlich ankam, in erster Reihe von der Constanz des Gebläseluftdruckes ab; dieser macht jedoch die mehrere Meter betragenden Schwankungen im Druck der städtischen Wasserleitung mit, wie ein neben die Pfeife geschaltetes Manometer anzeigte. Dieses Manometer bestand einfach aus einer grossen mit Wasser gefüllten Flasche, in die von oben durch einen durchbohrten Kork ein Glasrohr bis fast an den Boden geführt war. An den Aenderungen der Höhe der Luftsäule im Glasrohr, gerechnet bis zum Niveau des Wassers, konnte man die Schwankungen des Luftdruckes in der Pfeife ablesen. An diesem Manometer können noch Aenderungen des Druckes bemerkt werden, wenn auch das Ohr die dadurch bedingte Variation der Tonstärke und -höhe nicht mehr empfindet. — Unmittelbar an dem Gebläse wurde eine grosse leere Flasche mit einem luftdicht schliessenden Kork, durch den zwei kurze Glasröhren führten, angebracht und dahinter ein grosser Gummiballon, wie er zu Gasmotoren gebraucht wird, eingeschaltet. Die Flasche sollte eigentlich nur

dazu dienen, bei etwaigem Eindringen von Wasser in den Luftschlauch, diesem zum Abfluss zu dienen und somit die Pfeife zu schonen, aber es glich als grösseres Luftreservoir vermöge der Elastizität der Luft schon einen Theil der Druckschwankungen ab, was durch den Ballon, der ein Reservoir mit elastischer Wandung vorstellte, vollständig geleistet wurde. Bei dieser Einrichtung konnte der Pfeifenton als genügend constant angesehen werden, wenigstens waren im Manometer kaum noch Schwankungen bemerkbar. — Die Schwingungszahlen der später hauptsächlich benutzten Töne lagen zwischen 1050 und 1250.

3. Das gemeinsame Princip der unübersehbaren Reihe von Mikrophonconstructionen besteht darin, dass ein oder mehrere lose Kohlencontacte (selten Metallcontacte), die in einen Stromkreis eingeschlossen sind, durch Luftschwingungen in entsprechende periodische Widerstandsschwankungen gerathen und damit die Stromstärke Schwankungen gleicher Periode unterwerfen. Bei Benutzung des Mikrophons zum Sprechen kann das Empfangstelephon auf zweifache Weise geschaltet werden. Einmal direct in den Mikrophonkreis oder in die secundäre Spirale eines Inductoriums, dessen primäre Mikrophon und Batterie enthält, so dass die Stromschwankungen im primären Kreise oscillirende Ströme im secundären erregen, die das Telephon ansprechen lassen. Im vorliegenden Falle wird das Empfangstelephon durch das Electrodynamometer vertreten; es kann die erste Art der Schaltung gar nicht in Frage kommen, weil ja das Instrument dann stets eine grosse Ablenkung durch den Batteriestrom anzeigen würde. Es wurde also Mikrophon und Batterie mit der primären Spule eines Inductionsapparates, dessen Unterbrechungsvorrichtung ausgeschaltet war, das Dynamometer mit der secundären verbunden. Eine Erregung des Mikrophons versetzte dann das Eisenbündel in Schwingungen.

Als Ziel der Untersuchungen über das Mikrophon möchte ich bezeichnen: es soll ein Mikrophon construirt werden, welches, während die Tonquelle an derselben Stelle bleibt, herumgetragen werden kann und an jeder Raumstelle Aufschluss über die Tonstärke daselbst gibt. War dies erst erreicht, so konnte man in gewissem Sinne einen Fortschritt gegenüber den bisher

üblichen Methoden sehen. Denn sowohl das Grimsehl'sche Phonometer als die Wien'sche¹⁾ manometrische Kapsel sind Apparate an denen die unmittelbare Wirkung der Luftschwingung vermittelt Scala und Fernrohr abgelesen werden muss, die deshalb nicht transportabel sind. Die genannten Autoren haben sich nun dadurch geholfen, dass sie die Tonquelle beweglich machten; die Berufung auf das Helmholtz'sche²⁾ Reciprocitätsgesetz ist wohl unstatthaft, wenn man den Schall im geschlossenen Zimmer untersucht; denn dasselbe gilt streng nur für einen theilweise unbegrenzten Raum.

Ueber die mannigfachen Versuche mit Mikrophonen verschiedenartigster Construction — einem Kohlenkörnermikrophon, dem Berliner'schen³⁾ Transmitter, dem Mix und Genest'schen⁴⁾, sowie mit einem Mikrophon, dessen Schema von dem Assistenten des Instituts, in welchem diese Arbeit ausgeführt ist, Hrn. Dr. Milthaler, angegeben ist — habe ich an anderer Stelle⁵⁾ ausführlich berichtet. Das letztere allein hat sich einer Umgestaltung fähig gezeigt, welche ein für mich brauchbares Instrument lieferte. In seiner endgültigen Form ist es von dem Mechaniker des Instituts, Prill, angefertigt worden und hier in Fig. 1 und 2 gezeichnet.

Eine 0,07—0,08 mm dicke Glimmerplatte *b* ist am Rande eingeklemmt zwischen zwei starken, von den Schrauben *c* zusammengehaltenen Messingringen *aa'*, deren innerer Durchmesser 4,3 cm beträgt. An den Endpunkten des horizontalen Durchmessers sind zwischen den Ringen die Zapfen *dd'* festgelöthet, um welche der Messingbügel *ee* zugleich mit dem Zeiger *f* gedreht werden kann. Letzterer spielt über einem in *d* fest angebrachten Kreisausschnitt *g*, der mit einer Theilung versehen ist. In dem Messingbügel ist eine Vulcanfiberplatte *h* befestigt, welche bis nahe an die Glimmerplatte heranreicht. Auf derselben ruhen die Kohlenstifte *ii'* (Durchmesser 0,8 cm), welche mit den Schrauben *kk'*, die in den kleinen Messingbügeln *ll'* stecken, auf die Fiberplatte festgedrückt werden

1) Wien, Wied. Ann. 36. p. 834. 1889.

2) H. v. Helmholtz, Crelles Journal. Bd. 57. 1860.

3) Berliner, Electrotech. Zeitschrift 8. p. 375. 1887.

4) Mix und Genest, Electrotech. Zeitschrift 8. p. 245. 1887.

5) Vgl. Inaug.-Diss p. 13—23.

können. Die Schrauben drücken nicht direct auf die Kohlen, sondern auf kleine Kupferbleche, die wie Sättel auf den Kohlen liegen. Auf den festen Kohlen *ii'* ruht der lose Kohlenstift *m*, der gegen die kleinen auf die Glimmerplatte geklebten Gummistreifen *nn* lehnt. Das Heben und Senken der Fiberplatte mit den Kohlen wird bewerkstelligt durch die Schraube *o*, die in dem an *a'* befestigten Messingstreifen *p* beweglich ist. Die Schraube *o* drückt gegen eine kleine Glasplatte *q*, die an der

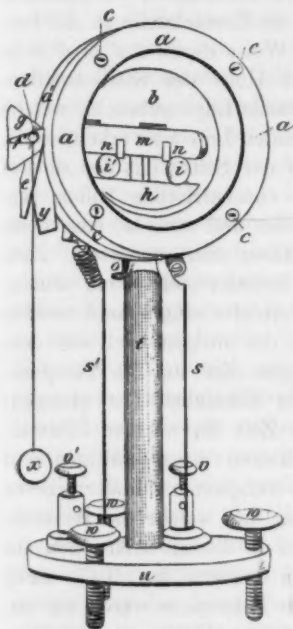


Fig. 1.

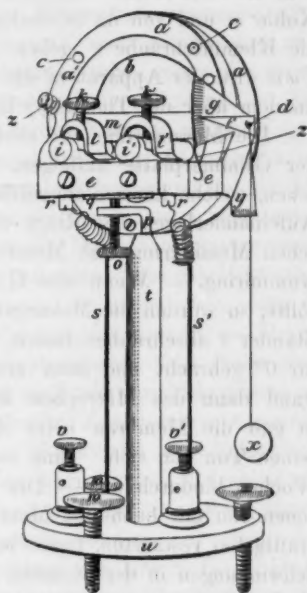


Fig. 2.

unteren Seite der Fiberplatte angeklebt ist. Schraubt man *n* herauf, so dreht sich der Bügel mit der Vulcanitplatte um *dd'*, schraubt man *o* herunter, so drücken die Federn *z* die Platte auf die Schraube herunter. Die Grösse des Drehungswinkels ist an dem Zeiger *f* auf der Kreistheilung *g* abzulesen. Die Lage der Zapfen *dd'* und damit die Drehungsaxe des beweglichen Theiles ist so gewählt, dass bei jedem beliebigen

Drehungswinkel die Lage der losen Kohle zur Membran unverändert bleibt. — In die Vulcanitplatte sind von unten die Schrauben rr' eingeschraubt und zwar so, dass r mit dem einen Messingbügel l , r' mit dem anderen l' in leitender Verbindung stehen. Zwei dünne Drahtspiralen führen zu den Kupferdrähten ss' , die parallel dem Ständer t laufen und in den auf dem Fusse u isolirt angebrachten Klemmschrauben vv' endigen. Der in v zugeleitete Strom wird also durch den Kupferdraht s zur Schraube r , durch den Bügel l , die Schraube k in die feste Kohle i fliessen, an der Contactstelle in die lose Kohle m und von da in analoger Weise durch $i' l' k' r' s'$ in die Klemmschraube v' gehen. Mit Hülfe der Stellschrauben www wird der Apparat in die verticale Lage gebracht, welche an dem über der Theilung y hängenden Lote x zu erkennen ist.

Die Messingringe aa' sind auf der Seite, mit der sie auf der Glimmerplatte aufliegen, mit concentrischen Rillen versehen, welche konisch angeordnet sind und zwar so, dass beim Aufeinanderlegen der Ringe die Rillen sich schliessen. Zwischen Messingring und Membran befindet sich je ein dünner Gummiring. — Wenn eine Glimmerplatte eingespannt werden sollte, so wurden die Messingringe, die übrigens sich von dem Ständer t abschrauben lassen, längere Zeit auf die Temperatur 0° gebracht und dann erst die Schrauben fest gezogen; stand dann das Mikrophon kurze Zeit im warmen Zimmer, so gab die Membran beim Anschlagen einen kräftigen und reinen Ton von sich. Eine solche Aufspannung hielt mehrere Wochen hindurch an. — Die Töne, auf welche die verschiedenen von mir benutzten Membrane in diesem Mikrophon am kräftigsten resonirten, lagen in den Grenzen von 1047–1245 Schwingungen in der Secunde. Das Mikrophon wurde auf ein Messingtischchen gesetzt von fast gleicher Grösse wie der Fuss des Mikrophons. Dieses Tischchen befand sich in einem Röhrenstativ, das beliebig verkürzt und verlängert werden konnte, sodass das Mikrophon an jede beliebige Stelle leicht gebracht werden konnte.

Ich habe auch das hier beschriebene Mikrophon zu Sprechversuchen benutzt und, wie vorausszusehen war, wurde eine sehr bedeutende Empfindlichkeit constatirt. Wurde in einer Entfernung von 5–6 m vom Mikrophon mit starker, doch nicht

überlauter Stimme gesprochen, so konnte in einem fernen Telephon jedes Wort deutlich gehört werden. Sehr empfindlich ist ferner das Mikrophon gegen äussere Erschütterungen.

Das beschriebene Mikrophon erfüllt die Forderungen, die ich zu stellen hatte: es hatte eine möglichst compendiöse Form, sodass es nicht selbst den Schallwellen zu Reflexionen Anlass gab, da seine Dimensionen möglichst klein im Verhältniss zur Wellenlänge der benutzten Töne: ferner hatte es constanten Widerstand, d. h. es konnte frei herumgetragen werden und lieferte stets an gleicher Stelle des Zimmers gleiche Stromstärken. — Diese Eigenschaft mangelte allen anderen untersuchten Mikrophonen, und gerade das zum Sprechen vorzüglichste, das Berliner'sche, zeigte die grössten Inconstanzen. auch bei unveränderter Stellung. — Zur Beobachtung der Widerstandsänderung benutzte ich ein Kugelgalvanometer und zwar mit folgender Schaltung. In einem Zweige einer Wheatstone'schen Drahtcombination befand sich das Mikrophon, in dem 2. ein Rheostat, in den beiden letzten zwei nahezu gleiche Widerstände von ca. 50 S.-E. Das Galvanometer wurde in eine Verzweigung der Brücke gebracht. War das Mikrophon in Ruhe, so wurde der Widerstand so abgeglichen, dass die Brücke stromlos war, jede Widerstandsänderung im Mikrophon liess Strom durch die Brücke fliessen. Mit Hilfe einer Umschaltung konnte schliesslich an Stelle des Mikrophons ein zweiter Rheostat in den betreffenden Zweig gebracht werden, und somit auch der wirkliche Widerstand des Mikrophons gemessen werden. Als Batterie wurden stets 4 Daniell'sche Becher gewählt, deren Strom jetzt nicht in seiner ganzen Stärke das Mikrophon durchfloss, sondern nur nach Abschwächung durch eine Verzweigung von 100 S.-E. — Da es wichtig war, zugleich mit der Dynamometerbeobachtung den Widerstand zu beobachten, wurde die Scala des Galvanometers vermittelt eines Prismas in das Dynamometerfernrohr hineingelenkt und zwar so, dass sie über der Dynamometerscala gesehen wurde. — Das Bild, welches man jetzt von den Widerstandsverhältnissen bekommt, ist ein sehr klares. Die periodischen Widerstandsänderungen haben, als zu rasch in entgegengesetzter Richtung aufeinander folgend, keinen Einfluss auf die Nadel, wohl aber alle anderen zufälligen und störenden

Änderungen. So wurde stets das Hughes'sche Phänomen, das Oberbeck seiner Methode zu Grunde legte, wahrgenommen, eine Abnahme des Widerstandes beim Beginn der Erregung. Hiervon ist zu scheiden das allmähliche Sinken des Widerstandes auf ein Minimum. Während das erste Phänomen ausnahmslos bei jeder Beobachtung sich zeigt, tritt das letztere nur am Anfange einer jeden Beobachtungsreihe auf, bis nach einiger Zeit das Minimum erreicht ist. War dieses einmal eingetreten, so musste während des Blasens der Pfeife die Galvanometerscala in Ruhe bleiben, wenn anders die Dynamometerbeobachtung brauchbar sein sollte. Die Empfindlichkeit des Galvanometers wurde so regulirt, dass Schwankungen, welche zu kleine Amplituden hatten, als dass sie im Dynamometer merkliche Ströme hätten induciren können, gar nicht mehr wahrgenommen wurden, dass also nur die störenden beobachtet werden konnten. — Als günstigste Kohlenart stellte sich die künstliche Kohle heraus, wie man sie zu electrischen Lampen verwendet, mit einem Durchmesser von 0,8 cm. — Ich habe die Kohlenstifte mit verschieden feinem Schmirgelpapier behandelt und gefunden, je rauher die Oberfläche, desto lauter und unreiner der Ton im Telephon, desto grösser die Inconstanz des Widerstandes, je glatter die Oberfläche, desto constanter und unempfindlicher das Instrument. Wurde die Kohle polirt, so wirkte das Mikrophon gar nicht, der Widerstand wurde unendlich gross. Wesentlich ist auch die völlige Gleichmässigkeit der Oberfläche. Auch ist es von Uebel zu viel Kohlenstaub nach dem Abschmirgeln auf den Kohlen zu lassen, da sonst die lose Kohle sich in den Staub einlagert und schwer beweglich wird. Als das zweckmässigste Verfahren hat sich schliesslich das folgende herausgestellt. Es wurde an der Drehbank die Kohle mit feinem Schmirgelpapier (Nr. 1) behandelt und dann der sich bildende Staub mit weicher Estampe auch an der Drehbank über die ganze Oberfläche vertheilt, so dass dieselbe ein gleichmässig mattes Aussehen bekam. — Die Empfindlichkeit des Mikrophons ist wohl am besten dadurch charakterisirt, dass ich in einer Entfernung von ca. 15 m von der Tonquelle noch deutlich Maxima und Minima nachweisen konnte. Die Empfindlichkeit variirte mit variirenden Tonhöhen; jedoch

muss bei den diesbezüglichen Untersuchungen mit Vorsicht verfahren werden. Wenn nämlich das Mikrophon an einer bestimmten Stelle auf einen Ton *c* einen grossen Dynamometerausschlag zeigte, auf den Ton *cis* aber einen geringen, so konnte dieser Unterschied auch davon herrühren, dass das Mikrophon für *c* wohl in einem Maximum sich befand, für *cis* jedoch nicht mehr. Deshalb kann man eigentlich nur in den Maximis gleicher Ordnung solche Vergleichen anstellen. Dass aber ein verschiedenes Verhalten gegenüber verschiedenen Tonhöhen stattfindet, ist leicht verständlich, da doch die Glimmermembran einen bestimmten Eigenton haben wird, auf den sie am leichtesten anspricht und bei dem sie die einfachste Schwingungsform annimmt. Um diesen Ton zu finden, wurde das Mikrophon in der Nähe der Pfeife horizontal befestigt und feiner Korkstaub auf die Glimmerplatte gestreut. Es wurde dann eine Tonhöhe ausfindig gemacht, bei der die Staubbewegung am lebhaftesten und die Staubfigur ein radiales Schwingen ergab. Geringe Aenderungen der Tonhöhe, die das Ohr nicht mehr empfand, machten sich in dem Verhalten des Staubes sofort bemerkbar. Deshalb war es eben so wichtig, einen constanten Ton zu erhalten.

4. Der Gang einer Beobachtung ist der folgende: Zuerst wird das Mikrophon in wagrechter Stellung an einem Stativ befestigt und vermittelst der Korkstaubfigur die Pfeife genau auf den Eigenton der Membran eingestellt. Diese Bestimmung hat man nur am Anfang einer Reihe von Beobachtungen auszuführen, wenn nicht grössere Temperaturschwankungen in zwischen eintreten. — Dann wird das Mikrophon an die zu untersuchende Stelle gebracht, vertical gestellt, und dem Kohlenlager die passende Neigung zur Horizontalen gegeben. Dieser Neigungswinkel muss — einmal empirisch als der günstigste gefunden — bei allen Beobachtungen der gleiche bleiben. Bei dem beschriebenen Mikrophon fand ich ihn zu ca. 2° . Während die Pfeife tönt, klopft man mit einem Stäbchen leise gegen die lose Kohle; dieser Eingriff bewirkt einmal, dass die Kohle leichter in Schwingungen geräth und ist besonders an Orten schwacher Bewegung nothwendig; sodann aber verursacht er das schnelle Sinken des Contactwiderstandes auf das später constant bleibende Minimum. Dann schliesst man den primären

Stromkreis, schaltet das Telephon in den secundären Kreis, um zu erkennen, ob der Batteriestrom nicht zu stark ist, was sich durch Auftreten der Verbrennungsgeräusche anzeigt, und überzeugt sich am Stande der Galvanometerscala, ob das Mikrophon normalen mittleren Widerstand hat. Ist der Widerstand zu gross oder zu klein, so kann man geringe Differenzen durch einen leisen Druck auf die lose Kohle ausgleichen, ist der Widerstand auffallend gross, so sind die Contactstellen verbrannt und man muss die Kohlen drehen oder verschieben. Verbrennungsstellen markiren sich auch dem blossen Auge durch das Auftreten kleiner tief schwarzer Punkte. Ist die Kohle schon allseitig verbrannt, so muss man sie durch neue, nach den obigen Angaben hergestellte, ersetzen. Ist dann der mittlere Widerstand regulirt, so kann man den secundären Stromkreis, der das Dynamometer enthält, schliessen. Der auf der Scala des Dynamometers abgelesene Werth ist aber nur brauchbar, wenn während der Beobachtung die Scala des Galvanometers sich gar nicht oder nur ganz langsam wenige Millimeter bewegt hat.

Ich habe mit Hülfe des Mikrophons die Lage der Maxima und Minima im Beobachtungszimmer untersucht. Eine genauere Angabe ist insofern überflüssig, als ihre Vertheilung durch die Form des Zimmers und die zufällige Stellung der reflectirenden Körper in ihm bedingt ist und das Ergebniss deshalb kein allgemeineres Interesse hat. Ich theile daher, um eine Anschauung von der Anwendbarkeit der dargelegten Methode zu geben, nur eine kurze Beobachtungsreihe mit.

In der Richtung des Hauptschallstrahles wurde das Mikrophon von einem als Nullpunkt gewählten Maximum von der Pfeife fort verschoben und die Maximal- und Minimalausschläge notirt. Es wurden an jeder Stelle je drei Beobachtungen gemacht und zwar nach jeder einzelnen Beobachtung das Mikrophon fortgenommen und dann wiederum an die alte Stelle gesetzt. Der mittlere Widerstand lag nahe an 12 S.-E. Die Wellenlänge betrug 30 cm.

d = Abstand vom Nullpunkt in cm	Dynamometerauschlag in Scalh.	Galvanometerscala	d = Abstand vom Nullpunkt in cm	Dynamometerauschlag in Scalh.	Galvanometerscala
0	165	ruhig	75	3	ruhig
	165	"		4	
	165	"		6	etw. Beweg.
15	75	ruhig		40	etw. Beweg.
	115	etwas Bewegung	90	30	ruhig
	120	"		30	"
	205	etw. Beweg.		5	ruhig
30	200	ruhig	105	5	"
	195	"		5	"
	4	ruhig		150	ruhig
45	6	"	120	140	"
	5	"		150	"
	310	etw. Beweg.		7	ruhig
60	370	ruhig	135	9	"
	370	"			

Die beobachteten Stellen liegen alle in einer Ebene; so erklärt sich auch, dass an der Stelle $d = 90$ cm kein besonderes Maximum herrscht. In solchen Fällen fand sich wenige cm über oder unter der Beobachtungsstelle das fehlende Maximum. Häufig wird auch ein secundäres Minimum mit einem primären Maximum zusammenfallen und somit der geringere Ausschlag an einer Maximumstelle sich erklären lassen.

Ich habe versucht, empirisch den Zusammenhang zwischen Tonintensität und Dynamometerauschlag aufzufinden, und wenn auch die bisherigen Versuche keine befriedigenden Resultate ergaben, so möchte ich doch kurz den Gedankengang der Methode angeben, weil ich glaube, dass sie bei gewissen Modificationen der betreffenden Versuche sich als fruchtbar erweisen werde.

Bringt man nämlich das Mikrophon unter den Recipienten einer Luftpumpe und variirt in ihm den Luftdruck, so lässt sich theoretisch leicht verfolgen, in welcher Weise die Aenderung der Tonintensität mit der des Luftdruckes zusammenhängt, wenn in der Nähe des Recipienten ein constanter Ton geblasen wird.

Nach Rayleigh¹⁾ ist die Intensität des Schalles defnirt durch:

1) Rayleigh, Theorie d. Schalles 2. §. 245. 1880.

$$1) \quad J = \frac{1}{2} \rho a \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 A^2$$

wo ρ die Dichtigkeit des Mediums

a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in demselben,

λ die Wellenlänge des betreffenden Tones,

A seine Amplitude.

Ich betrachte die hier vorkommenden Grössen als Functionen des Druckes. Nun ist bekanntlich a und λ vom Druck unabhängig; ich kann also setzen:

$$J = c' \cdot \rho \cdot A^2$$

oder da:

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{760}$$

$$2) \quad J = c \cdot p \cdot A^2.$$

Es ist nun zu ermitteln in wiefern A durch eine Aenderung von p beeinflusst wird. Es sei das Geschwindigkeitspotential einer einfachen Welle, die auf ein zweites Medium unter dem Winkel ϑ trifft¹⁾:

$$\varphi = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} \{ x \cos \vartheta + y \sin \vartheta + at \}$$

wo $x \cos \vartheta + y \sin \vartheta = \text{Const}$ die Richtung der Wellenebene gibt; es wird dann die in das zweite Medium gebrochene Welle dargestellt durch:

$$\varphi_1 = \frac{2A}{\frac{\rho_1}{\rho} + \frac{\cotan \vartheta_1}{\cotan \vartheta}} \cos \frac{2\pi}{\lambda_1} \{ x \cos \vartheta_1 + y \sin \vartheta_1 + a_1 t \}$$

φ ist zugleich der Ausdruck für die Welle unter dem Recipienten, wenn in ihm der äussere Luftdruck p herrscht; φ_1 gelte dann für den Luftdruck p_1 . Es wird dann $a = a_1$, $\lambda = \lambda_1$ und, da die Welle ungebrochen in dünnere Luft eintritt, $\vartheta = \vartheta_1$. Die Amplitude der Welle im verdünnten Raum ist dann:

$$A_1 = \frac{2\rho}{\rho + \rho_1} A = \frac{2p}{p + p_1} A$$

daraus folgt analog 2)

$$3) \quad J_1 = c \cdot p_1 \left(\frac{2p}{p + p_1} \right)^2 A^2$$

1) l. c. §. 270. A. Green, On the reflexion and refraction of sound. Cambridge transactions Vol. 6. 1838.

wobei die Constanten in den Ausdrücken 2) und 3) die nämlichen sind. Es ergibt sich:

$$\frac{J}{J_1} = \frac{(p + p_1)^2}{4 p p_1}.$$

Wird also die Intensität des Tones unter dem Recipienten bei einer gewissen festen Stellung der Pfeife vor demselben bei $p = p_1$ zur Einheit gewählt, so kann man die Scala des Dynamometers auf diese Weise in Schallintensitäten calibriren. Die mir zur Verfügung stehenden constanten Töne erwiesen sich aber zu diesem Zwecke als zu schwach. Wurde nämlich das Mikrophon unter den Recipienten gesetzt, so dämpfte die dicke Glasglocke den Schall so sehr, dass das Dynamometer keinen Ausschlag mehr anzeigte. Im Telephon konnte der Ton noch wahrgenommen werden und es war, wenn der Recipient evacuirt wurde, auch eine Abnahme der Tonintensität deutlich wahrnehmbar. Das Mikrophon wurde übrigens, um directe Schallleitung zu verhindern, auf dicke Gummistücke gesetzt und die Zuleitungsdrähte wurden möglichst dünn gewählt. Bei Anwendung der Siemenstrompete erhielt ich nur einen Ausschlag bis zu 2 cm; wenn man aber bedenkt, dass der Ton dieser Trompete unharmonisch zum Eigenton der Mikrophonmembran war, so wird wohl zu erwarten sein, dass, wenn man den richtigen Ton constant mit grosser Stärke blasen lässt, die erwähnte Calibrirung auf diese Weise möglich sein wird.

Um die Dynamometerscala in Ampère zu calibriren, wurde der Reductionsfactor einer Tangentenbussole electrolytisch ausgemessen. Man kann das Bellatische Instrument der Wirkung des Erdmagnetismus wegen nicht für constante Ströme benutzen, sondern muss es mit Hülfe eines zweiten Dynamometers anderer Construction calibriren. Das Kohlrausch'sche Instrument lässt sich übrigens, wie ein Versuch mich belehrte, auch nicht ohne ein anderes auswerthen. Denn da die Zuleitung zur beweglichen Rolle durch Schwefelsäure geführt wird, tritt bei durchgeschicktem constanten Strom Polarisation ein. Mittelst des Weber'schen Dynamometers fand ich dann den Ampèrewerth eines Scalentheils zu $4 \cdot 10^{-7}$ oder in absolutem Maasse

$$1 \text{ Scit.} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1}.$$

Nach einer Angabe von Bosscha¹⁾ genügen alternirende Ströme von der Stärke $7,7 \cdot 10^{-8} \text{ cm } \frac{1}{2} \text{ g } \frac{1}{2} \text{ sec}^{-1}$, um im Telephon einen deutlichen Ton zu erzeugen. Diese Bestimmung scheint aber für die neueren Telephone, besonders das Siemensche Hufeisentelephon nicht zu gelten, denn ich konnte noch im Telephon einen Ton vernehmen, der das Dynamometer nicht mehr ablenkte, der also höchstens einen Strom von der Grössenordnung 10^{-9} erregt haben kann; wahrscheinlich lassen aber noch viel schwächere Ströme das Telephon ansprechen. — Liess ich den für das Mikrophon gewählten Ton auf das Telephon wirken, wenn die Telephonplatte ca. 2 cm vom Pfeifenende entfernt war, so erhielt ich Ströme von der Ordnung $10^{-6} \text{ cm } \frac{1}{2} \text{ g } \frac{1}{2} \text{ sec}^{-1}$, während im Mikrophon unter gleichen Bedingungen Ströme von der Ordnung 10^{-3} nachzuweisen waren. — War die Pfeife nur 20 cm vom Telephon entfernt, so waren die Ströme schon nicht mehr nachweisbar, also jedenfalls $< 10^{-8}$, während das Mikrophon in Maximis, die 5 m entfernt lagen, noch Ströme bis zu 10^{-5} inducirte. Der Strom, der durch Anblasen der Siemenstrompete mit Klöppel im Telephon erzeugt wird, ist von gleicher Grössenordnung, wie der stärkste Mikrophonton, der durch die bedeutend schwächere Holzpfeife hervorgerufen wird, nämlich $10^{-3} \text{ cm } \frac{1}{2} \text{ g } \frac{1}{2} \text{ sec}^{-1}$. Diese starken Ströme wurden stets mittelst Verzweigung gemessen.

Zum Schluss sei es mir gestattet Herrn Prof. Pape für das Interesse und die Anregung, die mir im Laufe der vorliegenden Untersuchungen durch ihn zu theil wurden, auch an dieser Stelle meinen ehrerbietigen Dank auszusprechen.

Physik. Inst. der Univ., Königsberg i. Pr., Ende Mai 1890.

1) Bosscha, Arch. Néerland. 13. p. 250. 1878. Beibl. 2. p. 513. 1878.

IX. *Ueber die durch Zerstäuben der Kathode erhaltenen Metallschichten; von J. Mooser.*

Einleitung.

Das Zerstäubungsphänomen der Kathode gehört zu den interessanten Erscheinungen, welche bei electricischen Entladungen in stark verdünnten Gasen sich darbieten. Die einschlagenden experimentellen Untersuchungen einer grossen Anzahl von Physikern haben bewiesen, dass das Wesen der Crookes'schen „strahlenden Materie“ mit ihrer motorischen Kraft, ihrer Richtungsänderung unter dem Einfluss von Magneten, ihrer spectralen Erscheinung u. s. w. zur Hauptsache darin besteht, dass die an der Oberfläche der negativen Elektrode gelegenen elektrisch erregten Molecüle sich von ihr losrennen und in den umgebenden Raum geschleudert werden. Die Ursache dieser Erscheinung ist noch nicht völlig aufgeklärt; dass aber die Abgabe occludirten Gases dieselbe wesentlich beeinflusst, geht aus den Untersuchungen von A. Berliner¹⁾ hervor.

Dieses Zerstäuben oder Verdampfen der Kathode ist zuerst von Wright²⁾ zu einem technischen Zwecke verwendet worden. Er liess eine Glasplatte bestäuben und erhielt auf diese Weise einen Metallspiegel.

Vor einigen Jahren haben A. Kundt³⁾ und B. Dessau⁴⁾ die nähern Bedingungen für gutes Zerstäuben verschiedener Electrodensubstanzen aufgesucht.

Kundt⁵⁾ zeigte die krystallinische Natur der durch Zerstäuben erhaltenen Metallschichten, indem er an ihnen Doppelbrechung nachwies; er fand, dass die aus magnetischen Substanzen hergestellten Schichten ein grosses optisches Drehungs-

1) A. Berliner, Wied. Ann. 33. p. 289. 1888.

2) Wright, Sillim. Journ. 13. p. 49 und 14. p. 169. 1877.

3) A. Kundt, Wied. Ann. 27. p. 59. 1886.

4) B. Dessau, Wied. Ann. 29. p. 353. 1886.

5) A. Kundt, Wied. Ann. 27. p. 59. 1886; 27. p. 191. 1886; 34. p. 469. 1888.

vermögen besitzen und es ist ihm auch gelungen mit ihrer Hülfe Brechungsexponenten von Metallen zu ermitteln.

Behufs quantitativer Bestimmungen dieser Grössen ist aber die Kenntniss der räumlichen Vertheilung der die Schicht bildenden Metallmoleculé unumgänglich nothwendig. Zu diesem Zwecke hat O. Wiener ¹⁾ Dickebestimmungen an verschiedenen Stellen der Schicht ausgeführt. Die angewandte Methode basirte auf der Messung von Wellenlängen von Lichtstrahlen, welche durch Interferenz ausgelöscht werden.

Auf den Vorschlag meines hochverehrten Lehrers Hrn. Prof. Dr. A. Kleiner habe ich versucht die geometrische Vertheilung der durch Zerstäuben erhaltenen Metallmasse mit Hülfe von Widerstandsmessungen an derselben zu studiren. Diese Methode, welche sich für diesen nächsten Zweck als sehr geeignet herausstellte, hat sich auch überaus fruchtbar erwiesen zur Ermittlung verschiedener Eigenschaften der zerstäubten Substanz.

1. Herstellung der Metallschichten und allgemeine Beobachtungen über die Art und Weise des Zerstäubens.

In Bezug auf die Herstellung der Metallschichten kann ich mich kurz fassen, da dieselbe in den im Eingang erwähnten Schriften ausführlich angegeben ist.

Der Apparat, welcher mir hierzu diente, besteht aus einem trichterförmigen Glasgefäss *A* (Fig. 1), das bei *C* erweitert ist, um mittelst Quecksilberverschluss die luftdichte Verbindung des Trichters mit der Glasröhre *B* herzustellen. In das untere Ende der Glasröhre ist eine der Electroden in Drahtform eingeschmolzen. Der Trichter wird auf eine dicke Glasplatte *D* gesetzt. Diese trägt einen Ring *E*, der wieder zur luftdichten Abschlüssung mittelst Quecksilber dient. Die Platte wird von einem Röhrensystem getragen, das ein verkürztes Quecksilbermanometer enthält und bei *G* auf eine Quecksilberluftpumpe gesetzt werden kann. Diese, nach Art der bei der Fabrikation von Glühlampen benutzten, ganz aus Glas construirte Pumpe lässt sich sehr bequem handhaben und erlaubt unter Anwen-

1) O. Wiener, Wied. Ann. 31. p. 629. 1857.

nung passender Vorsichtsmaassregeln mit Leichtigkeit den Gasdruck auf Bruchtheile eines mm zu erniedrigen. Durch die mit dem Hahn *H* versehene Röhre können beliebige Gase in den abgeschlossenen Raum eingeführt werden. Bei *F* ist die zweite Electrode eingeschmolzen. Die zu bestäubende kreisrunde Platte *J* aus Spiegelglas ruht auf kurzen Glasröhrchen.

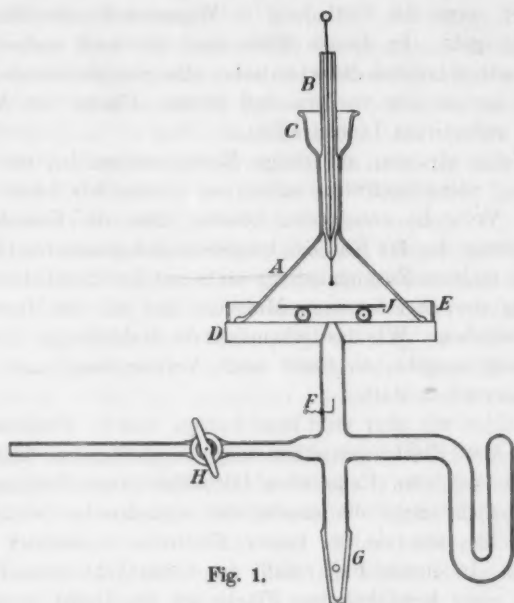


Fig. 1.

Für einige Zerstäubungsversuche wurde statt des Trichters eine lange, oben verschlossene Glasröhre auf die Platte *D* gesetzt.

Ist der Recipient bis auf wenige mm Gasdruck evacuirt, so bringt man die Electrodenenden so in Verbindung mit den Polen eines Ruhmkorff'schen Inductionsapparates, dass die obere Electrode zur Kathode wird. Diese zerstäubt nun während des Durchgangs der Electricität ihre Substanz und ein Theil davon lagert sich auf der Glasplatte ab, dort eine Metallschicht bildend, die senkrecht unter der Electroden spitze am dicksten

und mit der Entfernung von der Mitte sichtbar immer dünner wird. Geht die Zerstäubung in atmosphärischer Luft vor sich, so werden die von der Kathode abgerissenen Molecüle sofort oxydirt und die Metallschicht zeigt intensive farbige Ringe, ähnlich den auf electrolytischem Wege unter geeigneten Umständen erhaltenen Nobili'schen Ringen. Die Oxydation wird aber, wenn auch nicht ganz aufgehoben, so doch bedeutend reducirt, wenn die Entladung in Wasserstoff oder Stickstoff vor sich geht. In diesem Falle sind die noch auftretenden Ringe wahrscheinlich Newton'sche, also gebildet durch Interferenz der an der vordern und hintern Fläche der Metallschicht reflectirten Lichtstrahlen.

Wenn wir nun auf einige Erscheinungen bei der Zerstäubung näher eintreten wollen, so werden wir leicht durch wenige Versuche constatiren können, dass die Gestalt und Ausbreitung des die Kathode umgebenden sogenannten Glimmlichts in innigem Zusammenhang steht mit der räumlichen Ausbreitung der abgestossenen Molecüle und mit der Intensität des Zerstäubens. Wie das Glimmlicht die drahtförmige Kathode vollständig umgibt, so findet auch Verdampfung nach allen Seiten derselben statt.

Wählen wir aber statt einer kurzen, eine im Vergleich zur Distanz der Electroden spitzen lange drahtförmige Kathode, welche in das eine Ende einer Glasröhre eingeschmolzen ist, so wird nicht mehr die anscheinend cylindrische Gestalt des Glimmlichts, wie sie bei kurzer Electrode beobachtet wird, auftreten. In diesem Fall erfüllt das Glimmlicht einen Raum, der von einer kegelähnlichen Fläche um den Draht eingehüllt und gegen die Anode zu von einer Kugelfläche begrenzt ist. Die Höhe dieses Lichtkegels, dessen Spitze irgendwo in der Axe des zerstäubenden Drahtes liegt, ist bedingt durch den Gasdruck und die Intensität des electricen Stromes. Je grösser das Potential in einem Punkte der Kathode ist, um so grösser ist auch der Durchmesser des ihn umhüllenden Glimmlichts. In der That wächst auch die Intensität des Zerstäubens mit der Ausbreitung des Glimmlichts. Um dies nachzuweisen, lassen wir die Kathode eine cylindrische Glasröhre bestäuben, welche so in den zu evacuierenden Raum gebracht wird, dass der Draht mit ihrer geometrischen Axe

zusammenfällt. Wir werden dann leicht erkennen, dass die Dicke der auf der Innenseite der Glasröhre sich ablagernden Metallschicht gegenüber der Spitze der Kathode am stärksten ist und abnimmt bis zu den Stellen, welche der Spitze des Lichtkegels gegenüber liegen. Die Untersuchung in Bezug auf die Vertheilung der Molecüle der so erhaltenen Metallschicht würde uns wieder eine neue Quelle eröffnen für das Studium des Zerstäubungsvorganges.

Weitere Versuche zeigen, dass die räumliche Ausbreitung des Zerstäubungsproduktes von der Form der Kathode abhängig ist. Versetzen wir die Spitze derselben mit einer kleinen Metallkugel, so ist auch das Glimmlicht, das von ihr ausgestrahlt wird, kugelförmig begrenzt und es ist höchst wahrscheinlich, dass die Molecüle senkrecht zur Oberfläche, längs der Radien dieser Kugelfläche fortgeschleudert werden. Wir hätten dann eine einfach definirbare Ausbreitung der zerstäubten Substanz mit dem Mittelpunkt der Kugel als Zerstäubungscentrum. Die Annahme einer solchen Vertheilung ist aber gerechtfertigt, — auch auf Grund theoretischer Betrachtung über die Gestalt der Niveauflächen — wenn der Radius des Kügelchens verschwindend klein ist gegenüber seiner Distanz von der Anode.

Eine nicht ganz geschlossene Hohlkugel, welche die kugelförmige Kathode als Mittelpunkt enthält, wird daher auf ihrer innern Fläche von einer Metallschicht überdeckt, welche in allen Punkten dieselbe Dicke hat. Dies bestätigte sich an einer Zerstäubung, welche in einer, mit einem kleinen Ansatzröhrchen versehenen Glaskugel vor sich ging. Aus der in allen Punkten gleichen Durchsichtigkeit dieser Schicht war auf überall gleiche Dicke derselben zu schliessen.

Die meisten der von mir auf ihre geometrische Vertheilung untersuchten Metallschichten sind erhalten worden durch Zerstäuben einer Kugelelectrode aus Platin. Das an die drahtförmige Kathode angesteckte Kügelchen wurde auf der Drehbank hergestellt und hatte einen Durchmesser von 3 mm. Wichtig ist, dass seine Oberfläche in Bezug auf metallische Reinheit fehlerfrei sei. Die Zerstäubung ging in Wasserstoff von etwa 1 mm Druck vor sich. Der dem Entwicklungsapparat entströmende Wasserstoff hatte, zum Zwecke seines Trocknens,

eine mit Calciumstücken gefüllte Glasröhre und eine Säule von concentrirter Schwefelsäure zu durchlaufen. Der Recipient wurde mehrmals abwechselnd mit Gas gefüllt und ausgepumpt. Diese Operationen allein reichen aber nicht hin allen Sauerstoff zu entfernen; ein grosser Theil des Restes wird noch bei der Zerstäubung auf Kosten rein metallischer Schichten verzehrt. Es ist daher empfehlenswerth, vor der definitiven Bestäubung der Glasplatte, die electrischen Entladungen einige Minuten lang in umgekehrtem Sinne vorsichgehen zu lassen, d. h. so, dass das Kügelchen zur positiven Electrode wird.

II. Die räumliche Vertheilung des Zerstäubungsproductes.

In diesem Abschnitt soll die geometrische Vertheilung der zerstäubten Substanz auf einer Ebene näher untersucht werden. Zur Erreichung dieses Zieles führen zwei ganz verschiedene Wege. Wir können erstens nach dem Vorgang von O. Wiener direct die Dicke der Schicht in verschiedenen Distanzen von ihrem Mittelpunkt bestimmen. Zweitens können wir aber auch Anfangs rein theoretisch verfahren, indem wir den Berechnungen eine Hypothese über die räumliche Ausbreitung des Zerstäubungsproductes zu Grunde legen und dann durch das Experiment die nöthigen Zahlenwerthe ermitteln. Wir haben diese letztere Bestimmungsweise eingeschlagen und uns durch folgende Ueberlegungen leiten lassen.

a) Theoretischer Theil.

Unter Voraussetzung einer zerstäubenden Kugelectrode, an deren Oberfläche das Potential constant ist, sind sämtliche Potentialniveauflächen sphärisch. Weicht die Kathode von dieser Form ab, so werden immerhin die Niveauflächen mit wachsender Distanz die Kugelgestalt anstreben. Wir dürfen nun annehmen, dass die Richtung der Bewegung der frei werdenden Kathodentheilchen diejenige der aus der Potentialniveaufläche austretenden Kraftlinien ist. Diese Richtung, welche bekanntlich zu den Niveauflächen senkrecht steht, werden sie, insofern keine äusseren Ursachen den Vorgang beeinflussen, beibehalten vermöge der ihnen innewohnenden Inertie. Machen wir aber diese Hypothese einer vom Centrum der Kugelschale

ausgehenden radialen materiellen Strahlung, welche Annahme die im vorigen Abschnitt angeführten Versuche zur Genüge als richtig bestätigen, so wird es ein leichtes sein, die uns gestellte Aufgabe zu lösen.

Angenommen die Kugelelectrode befinde sich im Abstand h (Fig. 2) über einer Ebene und zerstäube in der Zeiteinheit die Masse c , also in der Zeit t die Masse $c \cdot t$, dann erhält die Flächeneinheit der um den Mittelpunkt der Kathode beschriebenen Kugelfläche vom Radius ρ in der Zeit t die Masse:

$$\frac{ct}{4\pi\rho^2}.$$

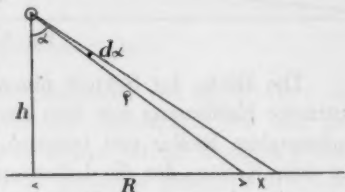


Fig. 2.

Das Element der Kugelzone vom Radius ρ hat den Inhalt $2\pi\rho^2\sin\alpha d\alpha$. Durch diese Fläche strömt die Masse:

$$\frac{ct}{4\pi\rho^2} 2\pi\rho^2\sin\alpha d\alpha$$

und vertheilt sich auf eine Ringfläche, deren Inhalt unter Voraussetzung kleiner Breite:

$$2\pi R x, \text{ wo } x = \frac{\rho d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Somit ist, wenn δ_R die Dicke der Schicht im Abstand R vom Mittelpunkt und Δ die Dichte der zerstäubten Substanz bedeuten:

$$\frac{ct}{4\pi} 2\pi\sin\alpha d\alpha = 2\pi R \rho \frac{d\alpha}{\cos\alpha} \cdot \delta_R \cdot \Delta,$$

woraus:

$$\delta_R = \frac{ct}{4\pi\Delta} \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{R \cdot \rho};$$

oder:

$$\delta_R = \frac{ct}{4\pi\Delta} \frac{h}{\rho^3} = \frac{ct}{4\pi\Delta} \frac{h}{\sqrt{(R^2 + h^2)^3}}.$$

Das Maximum der Dicke tritt im Mittelpunkt der Schicht ein und ist:

$$\delta_0 = \frac{ct}{4\pi\Delta h^3},$$

weshalb auch geschrieben werden kann:

$$\delta_R = \delta_0 \frac{h^3}{\sqrt{(R^2 + h^2)^3}}.$$

Ein zur bestäubten Ebene senkrechter, durch den Mittelpunkt der Metallschicht gehender, ebener Querschnitt hat daher eine äussere Begrenzung, die durch folgende Curve dargestellt wird:



Fig. 3.

Die Dicke der Schicht nimmt von der Stelle, welche die kürzeste Entfernung von dem Zerstäubungspunkte hat mit zunehmendem Radius erst langsam, dann immer rascher ab bis zu dem Kreise, der die Inflexionspunkte enthält. Von da an wird die Abnahme der Dicke immer geringer, sie nähert sich asymptotisch dem Werth Null, der für ein unendlich grosses R eintritt.

Für die Anwendung dieser Metallschichten zu optischen Untersuchungen spielt der die Inflexionspunkte enthaltende Kreis eine wichtige Rolle. Er besitzt den Radius $R_i = h/2$ und die Dicke der Schicht in dieser Entfernung vom Mittelpunkt ist:

$$\delta_i = V\left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \delta_0.$$

Die Inflexionstangenten schneiden die Ebene in einem Kreise vom Radius $= 4h/3$ und ihre Neigung bestimmt sich aus:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \frac{\delta_0}{h}.$$

Dieser grösste Werth des Neigungswinkels wird bewirken, dass allfällige Newton'sche Ringe in der Nähe des Kreises der Inflexionspunkte am dichtesten aufeinander folgen, sowohl im durchgehenden als im reflectirten Lichte. Zur Bestimmung der Brechungsexponenten von Metallen wird man am vorteilhaftesten den Lichtstrahl an der Stelle eines Inflexionspunktes einfallen lassen, da dort der brechende Winkel verhältnissmässig leicht und genau berechnet werden kann.

Zu obigen Anwendungen der Schichten kann man auch das Zerstäubungsprodukt einer Drahtelectrode auf einer zu derselben parallelen Glasfläche auffangen. Ein Durchschnitt dieser Doppelprisma ähnlichen Schicht, senkrecht zur Draht-

richtung wird eine Gestalt besitzen, welche aus der hierfür geltenden Formel:

$$\delta_R = \frac{m t}{2 \pi A} \frac{h}{R^3 + h^3} = \delta_0 \frac{h^3}{R^3 + h^3}$$

zu bestimmen ist. m bedeutet die in der Zeiteinheit von der Längeneinheit des Drahtes zerstäubte Masse.

b) Experimenteller Theil.

Obwohl aus den Dickebestimmungen von O. Wiener die grösste Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der hier gegebenen Theorie hervorgeht, so wollen wir sie dennoch prüfen und zwar nach einer anderen, vielleicht genauern Methode, nämlich mit Hülfe von Widerstandsmessungen an den Metallschichten.

Denken wir uns einen Theil der Schicht abgegrenzt durch concentrische, auf der bestäubten Ebene senkrecht stehende Cylinderflächen, in deren Axe das Centrum der Schicht liegt, so ist die Fläche q eines cylindrischen Querschnittes vom Radius R :

$$q = 2 \pi R \delta_R = \frac{c t h R}{2 A \sqrt{(R^2 + h^2)^3}}$$

Bedeutet ω den specifischen Widerstand der zerstäubten Substanz, so ist der Leitungswiderstand $W_{1,2}$ zwischen concentrischen Cylinderflächen der Radien R_1 und R_2 :

$$W_{1,2} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\omega dR}{q} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2 A \omega}{c t h} \frac{\sqrt{(R^2 + h^2)^3}}{R} dR.$$

Wird der Ausdruck $2 A \omega / c t h$ als constant vorausgesetzt, so wird:

$$W_{1,2} = \frac{2 A \omega}{c t h} \left[\frac{4 h^3 + R_2^3}{3} \sqrt{R_2^2 + h^2} - \frac{4 h^3 + R_1^3}{3} \sqrt{R_1^2 + h^2} \right. \\ \left. + h^3 \ln \left(\frac{R_2 \sqrt{R_2^2 + h^2} + R_2^2 + h^2}{R_1 \sqrt{R_1^2 + h^2} + R_1^2 + h^2} \right) \right].$$

Beachtet man, dass

$$\frac{c t h}{A} = 4 \pi \sqrt{(R^2 + h^2)^3} \cdot \delta_R,$$

so lässt sich die Schichtendicke in der Entfernung R vom Centrum in der Form ausdrücken:

$$\delta_R = \frac{\omega}{2\pi W_{1,2}} \left[\frac{4h^3 + R_2^3}{3} \sqrt{R_2^3 + h^3} - \frac{4h^3 + R_1^3}{3} \sqrt{R_1^3 + h^3} + h^3 \ln \left(\frac{R_2 h + \sqrt{R_1^3 + h^3}}{R_1 h + \sqrt{R_2^3 + h^3}} \right) \right]$$

und speciell für $R = 0$ wird die maximale Dicke:

$$\delta_0 = \frac{\omega}{2\pi h^3 W_{1,2}} \left[\frac{4h^3 + R_2^3}{3} \sqrt{R_2^3 + h^3} - \frac{4h^3 + R_1^3}{3} \sqrt{R_1^3 + h^3} + h^3 \ln \left(\frac{R_2 h + \sqrt{R_1^3 + h^3}}{R_1 h + \sqrt{R_2^3 + h^3}} \right) \right].$$

Hieraus ist ersichtlich, dass unter Voraussetzung der Kenntniss des specifischen Widerstandes der zerstäubten Substanz die Dickebestimmung mit Hülfe einer einzigen Widerstandsmessung ausgeführt werden kann.

Ist δ_0 bekannt, so berechnet sich die von der Kugelelectrode in der Zeiteinheit zerstäubte Masse nach der Formel:

$$c = \frac{4\pi \Delta h^3}{t} \delta_0.$$

Da im Quotienten zweier Widerstände von Schichten verschiedener Ausdehnung verhältnissmässig leicht messbare Grössen auftreten, so werden wir ihn benutzen, um unsere Annahme über die geometrische Vertheilung der Metallmasse auf einer Ebene auf ihre Richtigkeit zu prüfen.

Bedeutet $W_{m,n}$ den Widerstand der Schicht zwischen den Radien R_m und R_n , $W_{s,t}$ denjenigen zwischen den Halbmessern R_s und R_t , so soll theoretisch die Gleichung existiren:

$$\frac{W_{m,n}}{W_{s,t}} = \frac{\frac{4h^3 + R_n^3}{3} \sqrt{R_n^3 + h^3} - \frac{4h^3 + R_m^3}{3} \sqrt{R_m^3 + h^3}}{\frac{4h^3 + R_t^3}{3} \sqrt{R_t^3 + h^3} - \frac{4h^3 + R_s^3}{3} \sqrt{R_s^3 + h^3}} + \frac{h^3 \ln \left(\frac{R_n h + \sqrt{R_m^3 + h^3}}{R_m h + \sqrt{R_n^3 + h^3}} \right)}{h^3 \ln \left(\frac{R_t h + \sqrt{R_s^3 + h^3}}{R_s h + \sqrt{R_t^3 + h^3}} \right)}.$$

Im Vorausgehenden haben wir die Dichte und den specifischen Widerstand nicht als Funktion der Entfernung vom

Mittelpunkt der Schicht vorausgesetzt und wollen nun an diese Annahme folgende vorläufige Betrachtungen knüpfen.

Was die Dichte der zerstäubten Substanz anbelangt, so wird sie ohne Zweifel an denjenigen Stellen der Schicht constant sein, wo wir eine grössere Dicke als die moleculare antreffen, wo also die Kathodentheilchen schon in solcher Zahl aufgefallen sind, dass sie sich übereinander lagern müssen. Hingegen wird in der Ebene ein Kreis existiren, dessen Radius von der Intensität und Dauer der Zerstäubung abhängt, ausserhalb welchem die Moleculé so spärlich vertheilt sind, dass sie keine cohärente Masse bilden. Ausserhalb dieses Kreises finden unsere Widerstandsbestimmungen naturgemäss keine Anwendung.

Haben wir es mit metallisch reinen Schichten zu thun, so ist nicht einzusehen, dass der specifische Widerstand eine Funktion des Radius R wäre, so lange R innerhalb der cohärenten Schicht bleibt. Anders wird es sich aber wahrscheinlich bei oxydirten Schichten verhalten. Die auf der zu bestäubenden Ebene sich ablagernden Kathodentheilchen haben, je nach ihrer Entfernung von der Mitte der Schicht, verschieden lange Wege durch das sie oxydirende Medium durchlaufen, wesshalb der specifische Widerstand mit wachsendem Radius zunehmen muss, weil, wie in einem spätern Abschnitt gezeigt wird, der specifische Widerstand für oxydirte Metallschichten viel mal grösser ist, als für rein metallische Schichten. Da ferner das Quantum von Sauerstoff im Recipienten während der Dauer der Zerstäubung beständig abnehmen muss, so ist einer gesetzmässigen Abhängigkeit zwischen specifischem Widerstand und Entfernung von der Mitte der Schicht nur äusserst schwierig rechnerisch beizukommen. Unsere Messungen sind aber an möglichst reinen Schichten vorgenommen worden, wo wir den specifischen Widerstand als constant voraussetzen durften.

III. Widerstandsmessungen an Metallschichten.

Das Princip, nach welchem Widerstandsbestimmungen an den Metallschichten auszuführen sind um die Vertheilung der Substanz zu ermitteln, geht aus der im vorigen Abschnitt

entwickelten Theorie hervor. Dort wurde der Widerstand einer durch Zerstäuben erhaltenen Metallmasse von ringförmiger Basisfläche berechnet unter der Voraussetzung, dass das Centrum der Ringfläche mit demjenigen Punkte der Schicht zusammenfalle, über welchem die Dicke der zerstäubten Substanz die grösste ist. Es wird somit unsere Aufgabe sein, ringflächige Contacte mit der Schicht herzustellen und diesen einen electricischen Strom zuzuführen.

Es hat sich gezeigt, dass wohl kaum bessere Contacte zu bewerkstelligen sind, als solche, welche das Quecksilber liefert.

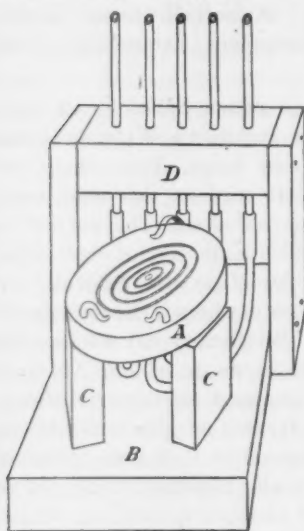


Fig. 4.

Dieses Metall verbindet sich rasch mit dem zerstäubten Platin zu einem Amalgam, das den Strom ohne erheblichen Widerstand der Metallschicht zuführt. Unter diesen Umständen dürfen wir annehmen, dass die Stromfäden, aus der Zerstäubungsschicht austretend, direct nach den nächstliegenden Contactstellen abbiegen. Der Apparat, der zur Herstellung der Contacte construirt wurde, ist in Fig. 4. skizzirt. In einer Holzplatte *A*, die von zwei auf einem Brett *B* befestigten Pfosten *C* getragen wird, sind mehrere 1,5 bis 2 mm breite und 2 bis 3 mm tiefe concentrische Rinnen ausgedreht. Jede Rinne com-

municirt mit einem am untern Ende der Platte eingekitteten Glasröhrchen. Letzteres ist durch einen Kautschukschlauch mit einem Röhrchen verbunden, das in dem Holzrahmen *D* in verticaler Richtung verschiebbar ist.

Die Glasplatte wird so auf die Holzplatte gelegt, dass die bestäubte Schicht dieser zugekehrt ist. Dasselbst wird sie mittelst Metallfedern festgehalten. Um eine Beschädigung der Schicht durch Berührung mit dem Holz zu verhindern, sind die erhabenen Ringflächen so abgedreht, dass zwischen ihnen und

der Glasplatte noch ein Zwischenraum von etwa 0,2 mm übrig bleibt, somit die Glasplatte nur auf derjenigen Holzfläche aufliegt, welche ausserhalb der Rinne von grösstem Radius sich befindet. Durch die vertical stehenden Glasröhrchen wird den Rinnen reines Quecksilber zugeführt. Das Quantum des Quecksilbers wird so gross genommen, dass bei einem gewissen Stande der Röhren die Rinnen vollständig ausgefüllt werden und das Quecksilber gegen die Metallschicht drückt, ohne von einer Rinne in eine benachbarte überfliessen zu können. Dieser Apparat wird in einen Zweig der Wheatstone'schen Brücke eingeschaltet. Der electriche Strom wird den Contactflächen durch Drähte, die in das Quecksilber der Glasröhrchen tauchen, zugeleitet. Zuerst ist der kreisflächige Contact mit der Mitte der Schicht herzustellen durch Aufziehen des entsprechenden Röhrchens, dann ist die Rinne von grösstem Radius mit Quecksilber zu füllen und der Widerstand der so abgegrenzten Metallschicht zu messen. Hierauf füllt man die zweitäusserste Rinne, macht wieder eine Widerstandsbestimmung und fährt so fort, bis alle Contacte hergestellt sind.

Indem wir zuerst den Contact mit der Mitte und dem äussersten Ringe bilden, wird ein gewisses Luftquantum abgesperrt. Durch die Füllung der zwischenliegenden Quecksilberinnen wird diese Luft immer mehr zusammengepresst und ist im Stande das Quecksilber der schon gebildeten und zur Messung benutzten Contacte zurückzustossen. Es muss daher am Apparat durch Luftcanälchen dafür gesorgt werden, dass die Luft zwischen den Ringen mit der äussern Atmosphäre communiciren kann.

Die Radien der Contactringe werden am besten erst bestimmt, nachdem sämtliche Widerstandsmessungen gemacht sind. Die vom Quecksilber berührt gewesenen Schichten zeigen sich nämlich auch bei abgenommener Platte deutlich sichtbar und scharf begrenzt. Zum Zwecke dieser Messungen diente ein mit Faden versehenes Mikroskop, das auf einem Maassstab verschiebbar war. Damit konnten die Durchmesser sowohl der äussern als der innern Peripherien der Contactflächen mit grosser Genauigkeit ermittelt werden.

Wir wollen im Folgenden die Resultate von Widerstandsbestimmungen an einigen Schichten zerstäubten Platins mit-

theilen. Mit Rücksicht auf die Art und Weise der Messung führen wir folgende Bezeichnungen ein:

Es sei iR_n der Radius der innern, aR_n derjenige der äussern Pheripherie der durch Quecksilbercontact gebildeten n ten Ringfläche. Ferner bedeute allgemein $W_{m,n}$ den Leitungswiderstand der Metallschicht begrenzt von der äussern Pheripherie des m ten und dem innern Umfang des n ten Quecksilberringes.

Die Widerstände sind in Ohm, die Längenmaasse in Centimeter angegeben. Der Abstand h wird am einfachsten vor dem definitiven Aufsetzen des Trichters gemessen. Hierzu wird man etwa eine Schicht von Glasplättchen auf die zu bestäubende Ebene legen und die Dicken der einzelnen Plättchen so wählen, das ihre Summe gleich der Entfernung des Mittelpunktes der Kugelkathode von der Glasfläche ist.

Mit Hülfe der Grössen W , R und h lässt sich die im Frühern pag. 648 für das Widerstandsverhältniss gegebene Formel ausrechnen.

Vier Platinschichten ergaben nachstehende Werthe:

Platte I.

h	Radien.	Gemessene Widerstände.	Verhältniss gemessener Widerstände.	Berechnetes Widerstandsverhältniss.	Abweichung in Proc. des theoretischen Verhältnisses.
0,74	$R_1 = 0,065$	$W_{1,2} = 5,809$	$\frac{W_{1,2}}{W_{1,3}} = 0,512$	0,557	8,0
	$iR_2 = 0,312$	$W_{1,3} = 11,312$	$\frac{W_{1,2}}{W_{1,4}} = 0,301$	0,299	0,7
	$aR_2 = 0,427$	$W_{1,4} = 18,868$	$\frac{W_{1,2}}{W_{1,5}} = 0,173$	0,178	2,8
	$iR_3 = 0,737$	$W_{1,5} = 33,487$	$\frac{W_{1,2}}{W_{2,3}} = 1,499$	1,524	1,6
	$aR_3 = 0,885$	$W_{2,3} = 3,875$	$\frac{W_{1,2}}{W_{2,4}} = 0,906$	0,927	2,2
	$iR_4 = 1,245$	$W_{2,4} = 6,411$	$\frac{W_{1,2}}{W_{2,5}} = 0,618$	0,629	1,8
	$aR_4 = 1,415$	$W_{2,5} = 9,399$	$\frac{W_{2,3}}{W_{2,4}} = 0,604$	0,608	0,6
	$iR_5 = 1,740$		$\frac{W_{2,3}}{W_{2,5}} = 0,412$	0,413	0,2
			$\frac{W_{3,4}}{W_{2,5}} = 0,682$	0,679	0,4

Platte II.

h	Radien.	Gemessene Widerstände.	Verhältniss gemessener Widerstände.	Berechnetes Widerstandsverhältniss.	Abweichung in Proc. des theoretischen Verhältnisses.
1,02	$R_1 = 0,065$	$W_{1,3} = 7,502$	$\frac{W_{1,2}}{W_{1,3}} = 0,591$	0,566	4,4
	$iR_2 = 0,310$	$W_{1,3} = 12,678$	$\frac{W_{1,2}}{W_{1,4}} = 0,392$	0,381	2,8
	$aR_3 = 0,445$	$W_{1,4} = 19,102$	$\frac{W_{1,2}}{W_{1,5}} = 0,269$	0,263	2,2
	$iR_3 = 0,752$	$W_{1,3} = 27,895$	$\frac{W_{1,2}}{W_{2,3}} = 1,999$	2,008	0,4
	$aR_3 = 0,900$	$W_{2,3} = 3,756$	$\frac{W_{1,2}}{W_{2,4}} = 1,737$	1,615	7,5
	$iR_4 = 1,252$	$W_{2,4} = 4,318$	$\frac{W_{1,2}}{W_{4,5}} = 1,314$	1,315	0,1
	$aR_4 = 1,450$	$W_{4,5} = 5,708$	$\frac{W_{2,3}}{W_{2,4}} = 0,869$	0,804	8,0
	$iR_5 = 1,757$		$\frac{W_{2,3}}{W_{4,5}} = 0,658$	0,654	0,6
			$\frac{W_{2,4}}{W_{4,5}} = 0,756$	0,814	7,1

Platte III.

h	Radien.	Gemessene Widerstände.	Verhältniss gemessener Widerstände.	Berechnetes Widerstandsverhältniss.	Abweichung in Proc. des theoretischen Verhältnisses.
0,74	$R_1 = 0,082$	$W_{1,3} = 5,045$	$\frac{W_{1,2}}{W_{1,3}} = 0,466$	0,462	0,9
	$iR_2 = 0,290$	$W_{1,3} = 10,817$	$\frac{W_{1,2}}{W_{1,4}} = 0,253$	0,256	1,2
	$aR_2 = 0,445$	$W_{1,4} = 19,902$	$\frac{W_{1,2}}{W_{1,5}} = 0,142$	0,146	2,7
	$iR_3 = 0,725$	$W_{1,5} = 35,480$	$\frac{W_{1,2}}{W_{2,3}} = 1,385$	1,365	1,4
	$aR_3 = 0,905$	$W_{2,3} = 3,642$	$\frac{W_{1,2}}{W_{2,4}} = 0,826$	0,829	0,4
	$iR_4 = 1,230$	$W_{2,4} = 6,091$	$\frac{W_{1,2}}{W_{4,5}} = 0,485$	0,492	1,4
	$aR_4 = 1,420$	$W_{4,5} = 10,408$	$\frac{W_{2,3}}{W_{2,4}} = 0,595$	0,606	1,8
	$iR_5 = 1,755$		$\frac{W_{2,3}}{W_{4,5}} = 0,349$	0,360	3,0
			$\frac{W_{2,4}}{W_{4,5}} = 0,585$	0,594	1,5

Platte IV.

λ	Radien.	Gemessene Widerstände.	Verhältniss gemessener Widerstände.	Berechnetes Widerstandsverhältniss.	Abweichung in Proc. des theoretischen Verhältnisses.
0,92	$R_1 = 0,075$	$W_{1,2} = 5,381$	$\frac{W_{1,2}}{W_{1,3}} = 0,516$	0,515	0,2
	$iR_2 = 0,310$	$W_{1,3} = 10,380$	$\frac{W_{1,3}}{W_{1,4}} = 0,336$	0,335	0,3
	$aR_3 = 0,430$	$W_{1,4} = 15,859$	$\frac{W_{1,4}}{W_{1,5}} = 0,207$	0,219	5,4
	$iR_3 = 0,742$	$W_{1,5} = 25,766$	$\frac{W_{1,5}}{W_{2,3}} = 1,536$	1,496	2,6
	$aR_2 = 0,920$	$W_{2,3} = 3,469$	$\frac{W_{2,3}}{W_{3,4}} = 1,337$	1,323	1,1
	$iR_4 = 1,251$	$W_{3,4} = 3,988$	$\frac{W_{3,4}}{W_{4,5}} = 0,879$	0,957	8,2
	$aR_4 = 1,445$	$W_{4,5} = 6,062$	$\frac{W_{4,5}}{W_{3,4}} = 0,869$	0,884	1,7
	$iR_5 = 1,755$		$\frac{W_{3,4}}{W_{4,5}} = 0,572$	0,639	9,7
			$\frac{W_{3,4}}{W_{4,5}} = 0,658$	0,723	8,9

Die Uebereinstimmung zwischen den berechneten Widerstandsverhältnissen und denjenigen, welche aus dem Experiment sich ergeben ist, wie am besten aus den in Procenten des theoretisch bestimmten Widerstandsverhältnisses angegebenen Abweichungen erkannt werden kann, keine besonders gute zu nennen. Währenddem die Abweichungen in einigen Fällen unter 1 Proc. liegen, steigen sie in andern auf nahe 10 Proc. an. Von den vielen Schichten, an welchen Widerstandsbestimmungen vorgenommen wurden, stimmten die hier angeführten vier mit den Rechnungen am besten überein. Bei manchen der übrigen stiegen die Abweichungen auf 20 und mehr Procent an. Trotz dieser Differenzen darf man doch nicht den Schluss ziehen, dass der Massenvertheilung in der Schicht eine wesentlich andere Gesetzmässigkeit zu Grunde liege, als diejenige, welche wir angenommen, vielmehr muss man die Ursache der Abweichungen in verschiedenen, voneinander unabhängigen Fehlerquellen suchen, welche theils in der Schicht selbst liegen, theils den Messungen entspringen.

Was die letztere Gattung von Fehlerquellen anbelangt, so erkennt man aus den Tabellen, dass geringe Aenderungen in R und h schon grosse Differenzen in den theoretischen Widerstandsverhältnissen nach sich ziehen. Während die Radien nur um zehntel Millimeter variiren, ändert sich das Verhältniss in einem Fall um über 20 Proc. Kleine Unsicherheiten in der Bestimmung der linearen Grössen R und h können also schon grosse Abweichungen in den genannten Verhältnissen veranlassen. Ferner erinnere man sich, dass in der theoretischen Widerstandsbestimmung der Mittelpunkt der Schicht mit dem Centrum des Ringsystems der Quecksilbercontacte zusammenfallend vorausgesetzt wird. Obwohl nun die zu den Messungen verwendeten Metallschichten immer einige schwache Farbenringe zeigten, welche das Centriren erleichterten, so darf man doch nicht annehmen, dass obige Forderung mit mathematischer Genauigkeit realisirt war. Die Grösse der durch einen Centrirungsfehler hervorgerufenen Abweichungen zwischen den gemessenen und den theoretisch bestimmten Widerständen ist abhängig von den zu den Ringschichten gehörigen innern und äussern Radien. Setzen wir, der leichtern Ueberlegung wegen, voraus, wir hätten es nur mit sehr schmalen Ringschichten zu thun, so wird man erkennen, dass kleine Centrirungsfehler für sehr enge, sowie für sehr weite Ringe und ebenso für Ringe ganz in der Nähe des Kreises der Inflexionspunkte minimale Abweichungen veranlassen, dass hingegen maximale Differenzen auftreten müssen für Ringschichten, welche in den Zonen stärkster Krümmung der Metalloberfläche liegen. Demgemäss sollten in unsern Beispielen die gemessenen Widerstände $W_{1,2}$ und $W_{4,5}$ nicht erheblich abweichen von den theoretischen, hingegen könnten die Widerstände $W_{1,3}$ und $W_{3,4}$ mit grössern Fehlern behaftet sein. In der That lässt sich der Einfluss eines Centrirungsfehlers bei allen vier Schichten mehr oder weniger gut nachweisen, er ist aber meistens verwischt durch Fehler, welche in den Metallschichten selbst zu suchen sind. Es darf kaum erwartet werden, dass die Beschaffenheit der Kathodenoberfläche so vollkommen homogen sei, dass von jedem Flächenelement aus gleichviel Substanz zerstäubt werde. Ist also die diesbezüglich in der Theorie gemachte Annahme nicht erfüllt, so werden auch die Schichten nicht überall dieselbe Gesetz-

mässigkeit in der Dickeabnahme mit wachsendem Radius zeigen; es werden Stellen mit mangelhafter Bestäubung auftreten, welche eine Abweichung des gemessenen von dem theoretisch bestimmten Widerstande bedingen. Durch solche Unregelmässigkeiten in der Bestäubung lassen sich nun die grossen Unterschiede in den Widerstandsquotienten erklären, welche bei manchen Platten zum Vorschein gekommen sind. Ferner ist es auch nicht unwahrscheinlich, dass die Oxydationsverhältnisse, welche die Grösse des specifischen Widerstandes in hohem Maasse beeinflussen, nicht durch die ganze Schicht die gleichen sind.

Da es unmöglich ist, alle die oben genannten Fehlerquellen zu eliminiren, so werden die gemessenen Widerstände nie genau übereinstimmen können mit denen, welche Schichten von der von uns theoretisch bestimmten Gestalt zukommen. Berücksichtigen wir diesen Umstand, so wird es denn doch höchst wahrscheinlich, dass die entwickelte Theorie über die räumliche Ausbreitung der zerstäubten Substanz den That-sachen entspricht.

An dieser Stelle wollen wir noch einer bei den nach der beschriebenen Methode gemachten Widerstandsmessungen allgemein auftretenden Erscheinung Erwähnung thun.

Wir haben als Contactmittel Quecksilber gewählt, weil es mit den Schichten rasch eine metallische Verbindung eingeht; allein es hat den Nachtheil, dass es sich in der dünnen Metallschicht seitlich immer mehr ausbreitet, indem es das Metall verzehrt, um mit ihm ein Amalgam zu bilden. Ein Tropfen Quecksilber auf eine durch Zerstäuben erhaltene Goldschicht gebracht, breitet sich ziemlich rasch über eine Fläche aus, deren Grösse von der Masse des Quecksilbertropfens abhängt. Diese Vergrösserung der Contactfläche tritt u. A. auch bei Silber-, Palladium- und Platinschichten auf, allerdings in weit geringerem Maasse als bei Goldschichten. Die Breite einer durch die Quecksilbercontacte abgegrenzten ringförmigen Metallschicht nimmt also mit wachsender Zeit ab, indem sich der innere Umfang vergrössert, der äussere verkleinert und zwar um so mehr, je grösser der Druck ist, mit dem das Quecksilber gegen die Schicht presst. Dies bedingt eine Abnahme des Widerstandes von annähernd asymptotischem Verlauf. Die Grösse dieser Aenderung kann bedeutend reducirt

werden, wenn man dafür sorgt, dass der Ueberdruck des Quecksilbers an der Schicht klein wird.

Infolge dieser, allerdings sehr langsam fortschreitenden Amalgamation, die schliesslich einen Grenzwert erhält, werden auch die Widerstände einem Minimum zustreben und es ist angezeigt den Zeitpunkt seines Eintritts abzuwarten und dann die Ausmessung der Contactringe direct nach den Widerstandsbestimmungen vorzunehmen.

IV. Der specifische Widerstand zerstäubter Substanz.

Wie die Erfahrung lehrt, vermehrt die Oxydation den Leitungswiderstand eines Metalls in ganz erheblichem Maasse, deshalb lässt sich auch vermuthen, dass der specifische Widerstand zerstäubten Metalls grösser ist, als derjenige des nicht zerstäubten, indem die von der Kathode abgestossenen Moleküle beim Durchgang durch das nicht ganz sauerstofffreie Gas eine mehr oder weniger starke Oxydation erleiden. Nach A. Schuster¹⁾ ist es sogar unmöglich, durch Zerstäuben vollkommen reine Metalle zu erhalten, da die Moleküle selbst der einfachen Gase unter dem Einfluss des electrischen Stromes in Atome zerfallen. Eine Kupferschicht, unter gleichen Bedingungen hergestellt wie eine Platinschicht und von ungefähr gleicher Durchsichtigkeit, zeigte zwischen denselben Contactringen einen viel grössern Widerstand als letztere, obgleich im festen, nicht zerstäubten Zustand Kupfer besser leitet als Platin.

Die Bestimmung des specifischen Widerstandes zerstäubter Substanz erfordert eine Volumausmessung. Um diese möglichst einfach zu gestalten wollen wir das Zerstäubungsprodukt nicht auf einer Ebene, sondern auf einer Kugelfläche auffangen, da nach den Auseinandersetzungen auf p. 643 die Dicke einer so erhaltenen Schicht in allen Punkten constant ist, wenn die Zerstäubung vom Centrum der Kugelfläche ausgeht. Die Wägung der zu bestäubenden Kugelschale vor und nach der Bestäubung und ihre Flächenausmessung werden dann, normale Dicke vorausgesetzt, die nöthigen Daten liefern zur angenäherten Berechnung der Schichtdicke. Eine an der Schicht ausgeführte Widerstandsmessung wird schliesslich

1) A. Schuster, Proc. of the Royal Society of London 37. p.317. 1884.
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XLII.

auf den specifischen Widerstand führen. Bedeutet m das Gewicht der auf der Fläche f abgelagerten Substanz vom specifischen Gewicht Δ , so ist die Dicke δ der Schicht:

$$\delta = \frac{m}{f \cdot \Delta}.$$

Zum Zwecke der Berechnung der Leitungsfähigkeit der sphärischen Metallschicht denken wir uns letztere in unendlich schmale zonenförmige Schichten der Dicke δ zerlegt. Erscheint dann die Breite einer solchen Zone vom Mittelpunkt der

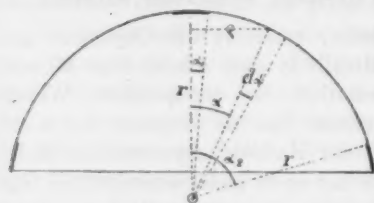


Fig. 5.

Kugel des Radius r aus gesehen unter dem Winkel $d\alpha$, so ist mit Hülfe der in nebenstehender Figur eingetragenen Bezeichnungen das Differential des Widerstandes:

$$dW = \omega \cdot \frac{r \cdot d\alpha}{2\pi \varrho \cdot \delta}$$

wo unter ω , wie früher, der specifische Widerstand verstanden ist.

Da nun $\varrho = r \sin \alpha$, so ergibt sich der Widerstand der Schicht zwischen concentrischen Kreislinien deren Radien unter den Winkeln α_1 und α_2 gesehen werden zu:

$$W = \frac{\omega}{2\pi\delta} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\omega}{2\pi\delta} \ln \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}} \right)$$

woraus:

$$\omega = \frac{2\pi\delta \cdot W}{\ln \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} / \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \right)}.$$

Zur Messung des Widerstandes sphärischer Schichten wurde ein dem früher beschriebenen ähnlicher Apparat benutzt, welcher erlaubte einen kreisförmigen Quecksilbercontact mit der Mitte und einen ringförmigen mit den äussern Partien der Metallschicht herzustellen. Die zu bestäubende Fläche einer sphärischen Glasschale vom Radius 1,1 cm hatte einen Inhalt von 6,3108 qcm.

Die Resultate der Widerstandsmessungen an sphärischen Platinschichten bestätigten die Vermuthung, dass der specifische Widerstand des zerstäubten Platins grösser ist als derjenige

des nicht zerstäubten und dass im allgemeinen die Leitungsfähigkeit rasch abnimmt mit sich vermehrender Oxydation der Schicht. Von meinen diesbezüglichen Bestimmungen will ich hier 3 Beispiele anführen, von denen zwei die extremsten Werthe für den specifischen Widerstand zerstäubten Platins geben, die ich gefunden.

1) Die Platinkugel, im geometrischen Mittelpunkt der Glasschale zerstäubend, gab in der Zeit von $\frac{1}{2}$ Stunde an letztere eine Masse von $0,0_{324}$ g ab. Nehmen wir das specifische Gewicht des zerstäubten Platins zu 21,5 an, also demjenigen des nicht zerstäubten Platins gleich, so berechnet sich die Dicke dieser Schicht zu $0,0_{176}$ cm. Es war grosse Sorgfalt darauf verwendet worden, dass der Recipient möglichst reinen Wasserstoff enthielt. Die Schicht schien metallisch rein zu sein, im durchgehenden Lichte bräunlich und wie aus der in allen Punkten gleichen Durchsichtigkeit zu schliessen war, überall gleich dick. Der Widerstand zwischen den Quecksilbercontacten, für welche

$$\alpha_1 = 7^{\circ} 48,8' \quad \alpha_2 = 68^{\circ} 54,4'$$

war, wurde gefunden zu 35,690 Ohm. Aus diesen Angaben berechnet sich der specifische Widerstand, im absoluten Maass, zu:

$$\omega = 171\,144 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}.$$

Matthiessen fand den specifischen Widerstand des gewöhnlichen, festen Platins 0,1548 mal so gross als denjenigen des Quecksilbers. Letzterer ist $944\,00 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$. Für gewöhnliches Platin wäre also der specifische Widerstand $= 14\,961 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$. Nach obigen Angaben wäre somit der specifische Widerstand von zerstäubtem Platin 11,3 mal grösser, als derjenige des nicht zerstäubten.

2) Eine andere, auch in Wasserstoff hergestellte Schicht war $0,0_{10}$ g schwer, hatte einen Widerstand von 25,516 Ohm. Ferner war:

$$\alpha_1 = 2^{\circ} 36,2' \quad \alpha_2 = 69^{\circ} 56,8'.$$

Daher

$$\omega = 345\,630 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1},$$

also 23,1 mal grösser als der specifische Widerstand des gewöhnlichen Platins.

3) Eine sehr stark oxydirte, in Luft hergestellte Platinschicht wog $0,0_{20}$ g, hatte für:

$$\alpha_1 = 3^{\circ} 55', \quad \alpha_2 = 69^{\circ} 56,8'$$

einen Widerstand von 30,912 Ohm, somit einen specifischen von
 $\omega = 1\,231\,800 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$
 der 82,3 mal so gross ist als derjenige des gewöhnlichen Platins.

Da beim Zerstäubungsvorgang die Oxydation der Metallmoleculé nie vollständig aufzuheben ist, so fragt es sich, ob die obige Annahme betreffend die Dichte zulässig sei oder nicht. Obwohl die geringsten Beimengungen von Oxyd den specifischen Leitungswiderstand eines Metalls ganz erheblich zu ändern vermögen, so wird eine bedeutsame Veränderung des specifischen Widerstandes nicht nothwendig eine erhebliche Aenderung der Dichte nach sich ziehen. Diesbezügliche numerische Angaben sind mir nicht bekannt, hingegen spricht das metallische Aussehen der Schichten dafür, dass der weitaus wesentlichste Bestandtheil reines Metall ist. Das specifische Gewicht des zerstäubten Platins ist ohne Zweifel etwas kleiner als 21,5, wenn wir aber dennoch diese Zahl zur Berechnung der Dicke einführen, so begehen wir einen Fehler, der die Grössenordnung der Dicke nicht sehr beeinflusst.

Die nach der hier entwickelten Methode erhaltenen Werthe für den specifischen Widerstand liegen innerhalb so weiter Grenzen, dass wir uns genöthigt sehen, den specifischen Widerstand einer auf einer Ebene ausgebreiteten Metallschicht, deren Oxydationsverhältnisse unbekannt sind, deren Dicke wir aber bestimmen wollen, direct zu ermitteln. Hierzu benutzen wir die Formel:

$$W_{m,n} = \frac{2 \Delta \omega}{c t h} \left[\frac{4h^2 + R_n^2}{3} \sqrt{R_n^2 + h^2} - \frac{4h^2 + R_m^2}{3} \sqrt{R_m^2 + h^2} \right. \\ \left. + h^3 \ln \left(\frac{R_n h + \sqrt{R_n^2 + h^2}}{R_m h + \sqrt{R_m^2 + h^2}} \right) \right]$$

in der wir in erster Linie die ganze Masse $c.t$, die von der Kathode überhaupt zerstäubt worden, ermitteln. Nehmen wir an, im Abstand h über dem Mittelpunkt einer Kreisfläche vom Radius R befinde sich das Centrum der zerstäubenden Kathodenkugel. Auf der Fläche lagere sich die Masse μ ab. Erscheint dann der Radius R vom Zerstäubungscentrum aus gesehen unter dem Winkel α , so ist die ganze von der Kugel zerstäubte Masse:

$$ct = \frac{\mu \cdot 180^\circ}{\alpha^\circ}.$$

Ist dann $W_{m,n}$ der Widerstand der Schicht zwischen den ringförmigen Contacten m und n , so kann ω aus obiger Formel leicht berechnet werden.

Bei einer ebenen Platinschicht, die unter ähnlichen Verhältnissen in Bezug auf Quantum und Qualität des Gases, sowie Electricitätsmenge, wie bei den vier Schichten, deren Widerstandsverhältnisse in den Tabellen angegeben wurden, hergestellt worden war, hatten wir folgende Werthe bekommen:

$$R = 2,3, \quad h = 0,8, \quad \alpha = 70^\circ 49', \quad \mu = 0,0,4, \quad ct = 0,0,99584.$$

$$W_{1,4} = 41,937 \times 10^9,$$

$$R_1 = 0,05, \quad R_4 = 1,25,$$

$$\omega = 275\,408.$$

Dieser Werth des specifischen Widerstandes ist 18,41 mal grösser als derjenige des gewöhnlichen Platins.

Da für ähnliche Oxydationsverhältnisse nach der ersten Methode für den specifischen Widerstand zerstäubten Platins Zahlen gefunden wurden, welche von der soeben berechneten nach oben und unten nicht weit abweichen, so leistet diese Uebereinstimmung einen Beweis für die Richtigkeit beider Bestimmungsarten. Letztere ist insofern einfacher als erstere, weil sie die sehr complicirte Volumbestimmung für ebene Schichten vollständig umgeht.

Zahlreiche Messungen haben dargethan, dass der specifische Widerstand zerstäubter Substanz keineswegs eine constante Grösse ist.

Meine diesbezüglichen Untersuchungen sind noch nicht so weit gediehen, dass ich die Ursache oder Ursachen der Variation des spec. Widerstandes mit voller Sicherheit erklären könnte. Immerhin scheint aus denselben die Vermuthung berechtigt zu sein, dass die Widerstandsvariationen, wenigstens zum grössten Theil, von chemischen Veränderungen herrühren, denen die dünnen Metallschichten an der Luft ausgesetzt sind.

V. Dickebestimmung der Metallschichten.

Wir gehen nun dazu über, die für die maximale Dicke geltende Formel (p. 648) auf die vier in den Tabellen angeführten Platinschichten anzuwenden.

Als Werth des spezifischen Widerstandes nehmen wir die Zahl 275 408, welche für eine Platinschicht gefunden wurde, die sich unter ähnlichen Verhältnissen gebildet hat, wie jene vier. Dann erhalten wir folgende Dicken:

$$\text{I)} \quad \delta_0 = \frac{275\,408}{2\pi \cdot 0,405\,224 \cdot 5,809 \cdot 10^9} \cdot 0,6879 = 0,0_4 128 \text{ cm}$$

$$\text{II)} \quad \delta_0 = \frac{275\,408}{2\pi \cdot 1,0612 \cdot 7,502 \cdot 10^9} \cdot 1,7315 = 0,0_5 95 \text{ cm}$$

$$\text{III)} \quad \delta_0 = \frac{275\,408}{2\pi \cdot 0,405\,224 \cdot 5,045 \cdot 10^9} \cdot 0,5556 = 0,0_4 119 \text{ cm}$$

$$\text{IV)} \quad \delta_0 = \frac{275\,408}{2\pi \cdot 0,7787 \cdot 5,331 \cdot 10^9} \cdot 1,1683 = 0,0_4 123 \text{ cm.}$$

Ferner berechnen sich die Dicken der Schichten in den Inflexionspunkten zu

$$\text{I)} \quad \delta_i = 0,0_5 9165 \text{ cm}$$

$$\text{II)} \quad \delta_i = 0,0_5 6822 \text{ cm}$$

$$\text{III)} \quad \delta_i = 0,0_5 8524 \text{ cm}$$

$$\text{IV)} \quad \delta_i = 0,0_5 8826 \text{ cm}$$

Die Winkel, welche die Inflexionstangenten mit der Ebene bilden, sind:

$$\text{I)} \quad \alpha = 3,066''$$

$$\text{II)} \quad \alpha = 1,756''$$

$$\text{III)} \quad \alpha = 2,852''$$

$$\text{IV)} \quad \alpha = 2,375''.$$

Die Ermittlung der Dicke gibt über manche wichtige optische Eigenschaften dünner Metallschichten Auskunft. So ergab sich, dass eine Platinschicht in einer Dicke von $0,23 \times 10^{-6}$ cm nicht mehr gut reflectirte; ferner dass, wenn der Molecular-durchmesser von Platin annäherungsweise zu $0,01 \times 10^{-6}$ cm angenommen wird, bei Platte I über 1200 Molecüle übereinander lagen, welche, da die Schicht an jener Stelle immer noch schwach durchsichtig war, nicht genügten, um alles einfallende Licht zu absorbiren.

Die Fruchtbarkeit der in dieser Arbeit befolgten Methode zur Untersuchung der durch Kathodenzerstäubung erhaltenen Metallschichten ist vollkommen nachgewiesen und an ihnen ausgeführte Widerstandsmessungen werden ohne Zweifel noch manche interessante Eigenschaften des Zerstäubungsproductes zu Tage fördern.

Die vorliegenden Untersuchungen sind im physikalischen Institut der Universität Zürich ausgeführt worden. Dem Leiter desselben, Herrn Prof. Dr. A. Kleiner spreche ich an dieser Stelle den wärmsten Dank aus für die von ihm ausgegangene Anregung zu dieser Arbeit und für die vielfache Unterstützung die er derselben angedeihen liess.

X. Ueber das Absorptionsspectrum und über die Farbe des flüssigen Sauerstoffs; von K. Olszewski.

(Aus dem Anzeiger der Acad. d. Wiss. in Krakau, Januar 1891; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

In seiner früheren Arbeit¹⁾ fand der Verfasser vier Absorptionsbanden im Spectrum des flüssigen Sauerstoffes entsprechend den Wellenlängen 628, 577, 535 und 480. Liveing und Dewar²⁾, welche später das Absorptionsspectrum des gasförmigen Sauerstoffes in einer langen Stahlröhre unter starkem Drucke beobachtet haben, fanden dieselben vier Absorptionen in dem sichtbaren Theile des Spectrums, ausserdem aber in äusserstem Roth zwei, den Fraunhofer'schen Linien *A* und *B* entsprechende Banden, welche auch von Egoroff und Janssen beobachtet worden sind. Ein zur Verflüssigung grösserer Quantitäten des Sauerstoffes neulich³⁾

1) K. Olszewski, Wien. Ber. II. Abth. 15. p. 253. 1887.

2) Liveing u. Dewar, Phil. Mag. (5) 26. p. 286. 1888.

3) K. Olszewski, Bull. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie. 1890. p. 176.

vom Verfasser construirter Apparat erlaubte demselben, seine früheren Experimente zu wiederholen und das Absorptionsspectrum einer dickeren Schicht flüssigen Sauerstoffes im äussersten Roth genauer zu untersuchen.

Der flüssige Sauerstoff wurde in eine dünnwandige, unten zugeschmolzene und, zum Schutze gegen die äussere Erwärmung, in einen Satz von drei Bechergläsern dicht eingepasste Glasröhre aus dem Verflüssigungsapparate eingegossen. Die Dicke der Sauerstoffsäule betrug 30 mm, die Höhe etwa 50 mm. Der flüssige Sauerstoff erhielt sich in der genannten Glasröhre unter dem Atmosphärendruck und bei seiner Siedetemperatur ($-181,4^{\circ}$) in einer zur Ausführung des Versuches genügenden Menge, über eine halbe Stunde, wiewohl demselben eine bedeutende Wärmemenge zugeführt wurde, namentlich durch das mittelst einer Sammellinse concentrirte Drummond'sche Kalklicht, welches der Verfasser zur Darstellung des Absorptionsspectrums benutzte. Zur Untersuchung des Absorptionsspectrums wurde ein Universalspectroskop von Krüss, mit einem Rutherford'schen Prisma, angewendet. Die Versuche ergaben ausser den vier bereits früher beobachteten Absorptionen noch ein fünftes, der Fraunhofer'schen Linie *A* entsprechendes, verwaschenes Band, welches namentlich dann ziemlich deutlich hervortrat, wenn zwischen die Lichtquelle und den Spalt des Spectroskopes ein rothes Glas eingeschaltet wurde. Dieses Band erschien schwächer als die drei den Wellenlängen 628, 577 und 480 entsprechenden Absorptionen, stärker jedoch als die Absorption bei 535. Bei dieser verhältnissmässig kleinen Dispersion konnte das Band *A* selbstverständlich nicht in Linien aufgelöst werden. Eine der Fraunhofer'schen Linie *B* entsprechende Absorption konnte auch diesmal nicht beobachtet werden.

Der flüssige Sauerstoff ist auf Grund der im Jahre 1883 ausgeführten Versuche, bei welchen nur kleine Quantitäten desselben gewonnen werden konnten, als eine farblose Flüssigkeit beschrieben worden. Seit jener Zeit beobachtete der Verfasser zu wiederholten Malen, so oft er den Sauerstoff in etwas weiteren Glasröhren verflüssigte, dass derselbe in durchfallendem Lichte, in etwa 15 mm dicken Schichten, eine

bläuliche Farbe zeigte. Bei den oben beschriebenen Versuchen, bei welchen zum ersten Male eine verhältnissmässig grosse Quantität flüssigen Sauerstoffes in einem Glasgefässe aufgefangen wurde, trat die hellblaue Farbe desselben entschieden zum Vorschein. Um sich zu vergewissern, dass der zu Versuchen verwendete, aus chlorsaurem Kali und Braunstein dargestellte Sauerstoff nicht etwa Spuren von Ozon enthält, von welchem die blaue Farbe herrühren könnte, wurde er in dieser Beziehung sorgfältig geprüft. Jodkalium-Stärkekleisterpapier färbte sich beim Aufbewahren in dem geprüften Sauerstoff gar nicht; auch bei stundenlangem Durchleiten des Gases durch eine Lösung von Jodkalium und Stärkekleister trat keine Bläuung auf. Der zum Versuch verwendete Sauerstoff verblieb übrigens in der eisernen Flasche, in welche er eingepumpt wurde, wochenlang in Berührung mit festem Kalihydrat, wobei derselbe von CO_2 , von Chlor und Wasserdämpfen vollkommen befreit wurde. Nach diesen Versuchen unterliegt es wohl keinem Zweifel, dass der Sauerstoff in flüssigem Zustande und in etwa 30 mm dicken Schichten eine entschieden hellblaue Farbe besitzt. Diese Farbe des Sauerstoffes stimmt übrigens sehr gut mit seinem Absorptionsspectrum überein. Es war wohl recht auffällig, dass eine farblose Flüssigkeit — denn als eine solche galt bisher der Sauerstoff — ein so ausgeprägtes Absorptionsspectrum gibt, in welchem die Absorptionen in Orange, in Gelb und in Roth überwiegen. Nachdem aber durch die eben angegebenen Versuche des Verfassers die blaue Farbe des flüssigen Sauerstoffes constatirt wurde, ist dieser scheinbare Widerspruch beseitigt worden.

Zum Schlusse noch ein Wort über die Farbe des Himmels. Es existiren bekanntlich so viele Hypothesen, welche dieselbe zu erklären suchen, dass der Verfasser kaum wagt, noch eine neue hinzuzufügen. Jedenfalls aber dürfte, seiner Meinung nach, diese Erscheinung am einfachsten dadurch erklärt werden, dass man die blaue Farbe des Himmels diesem Hauptbestandtheile der Atmosphäre zuschreibt, welcher — wenigstens im flüssigen Zustande — die blaue Farbe besitzt.

XI. Ueber die Brechung des Lichtes durch Metallprismen; von P. Drude.

Hr. Voigt¹⁾ hat früher darauf hingewiesen, dass es im allgemeinen keineswegs richtig ist, die Brechung in absorbirenden Prismen nach denselben Formeln zu berechnen, wie in durchsichtigen. Nur falls der Prismen- und der Einfallswinkel klein sind, ist dieses gestattet. — Die von Hrn. Voigt gegebenen Formeln sind für den Fall, dass der Einfallswinkel gross ist, complicirter Natur. Sie sind besonders für den Einfallswinkel $\varphi = 0$ specialisirt. Im Folgenden sollen durch Einführung zulässiger Näherungen vereinfachte und für die Rechnung bequeme Formeln aufgestellt werden, welche aber auch für grosse Einfallswinkel gültig bleiben. Dieses hat deshalb jetzt mehr Interesse gewonnen, weil neuerdings von den Herren Du Bois und Rubens²⁾ die Abhängigkeit der Brechung in Metallprismen vom Einfallswinkel einer experimentellen Forschung unterworfen ist. Diese bestätigt vollständig die nach der Theorie sich ergebenden Gesetze.

Das Medium, in welchem das Licht einfällt, sei durch den Index 0, das Metall durch den Index 1, das Medium, in welches das Licht austritt, durch den Index 2 bezeichnet. Die optischen Constanten der drei Medien seien charakterisirt durch die Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, wobei α_0 und α_2 reell sind und die reciproken Quadrate der Brechungsexponenten der beiden Medien gegen den leeren Raum bedeuten, falls man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in demselben gleich 1 setzt, und wobei ist:

$$\frac{1}{\alpha_1} = n(1 - i\kappa), \quad i = \sqrt{-1},$$

unter n den Brechungsexponenten des Metalls gegen den leeren Raum verstanden, unter κ seinen Absorptionsindex.

1) W. Voigt, Wied. Ann. 24. p. 144. 1885.

2) H. E. J. G. du Bois u. H. Rubens, Berl. Ber. 38. p. 955. 1890. Wied. Ann. 41. p. 507. 1890.

Die Elongation des Lichtäthers in einem der drei Medien ist gegeben als der reelle Theil einer Grösse:

$$A_m e^{\frac{i}{2} (t - (\mu_m x + \pi_m z))}, \quad m = 0, 1, 2,$$

falls die xz -Ebene in die Einfallsebene fällt, und die Prismenkante in die y -Axe. Dabei muss wegen der Differentialgleichungen der Bewegung des Aethers sein:

$$(1) \quad \mu_m^2 + \pi_m^2 = \frac{1}{a_m^2}, \quad m = 0, 1, 2.$$

Da wir hier nur die Richtungen der Wellennormalen kennen lernen wollen, so kommt es uns nur auf die Kenntniss der Grössen μ und π , nicht auf die der Amplituden an. Für diesen Zweck genügt als Grenzbedingungen die Gleichheit der Elongation der Aethertheilchen zu beiden Seiten einer Grenze.

Bezeichnen wir den Prismenwinkel durch γ und legen die z -Axe senkrecht zur Grenze (12), so ist für letztere $z=0$, für die Grenze (01):

$$\frac{x}{z} = \operatorname{tg} \gamma.$$

Aus den Grenzbedingungen folgt daher:

$$(2) \quad \begin{cases} \mu_0 \cos \gamma + \pi_0 \sin \gamma \\ = \mu_1 \cos \gamma + \pi_1 \sin \gamma, \\ \mu_1 = \mu_2. \end{cases}$$

Wir wollen annehmen, dass das Licht im Medium 0 einfallt. Es ist dann μ_0 und π_0 reell und zwar ist:

$$\frac{\mu_0 \cos \gamma + \pi_0 \sin \gamma}{\sqrt{\mu_0^2 + \pi_0^2}} = \sin \varphi,$$

wo φ den Winkel der einfallenden Wellennormale N_e mit dem Lothe auf der ersten Prismenfläche N_0 bezeichnet, d. h. den Einfallswinkel.

Unter Rücksicht auf die Gl. (1) folgt aus (2):

$$\left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{a_0^2}} - \mu_2 \cos \gamma \right)^2 = \pi_1^2 \sin^2 \gamma = \left(\frac{1}{a_1^2} - \mu_2^2 \right) \sin^2 \gamma,$$

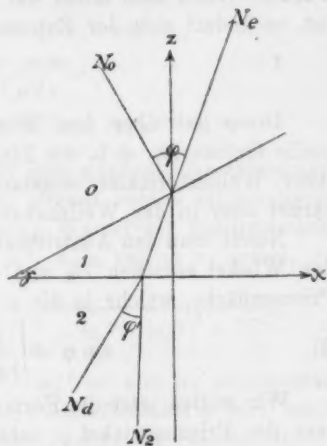


Fig. 1.

$$\text{d. h. (3) } \mu_2^2 - 2 \cos \gamma \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\epsilon_0}} \mu_2 + \frac{\sin^2 \varphi}{\alpha_0} - \frac{\sin^2 \gamma}{\alpha_1} = 0.$$

Aus dieser Gleichung bestimmt sich μ_2 , wenn φ bekannt ist, und da $\pi_2^2 = 1/\alpha_2 - \mu_2^2$ ist, so ist in dem Problem alles durch φ und γ ausgedrückt, d. h. dasselbe ist gelöst.

Setzt man:

$$(4) \quad \mu_2 = m_2 - i m_2', \quad \pi_2 = p_2 - i p_2',$$

so wird die Lichtbewegung im Medium 2 dargestellt durch den reellen Theil der Grösse:

$$A_2 e^{-\frac{m_2'^2 + p_2'^2}{2}} e^{\frac{i}{2} (t - (m_2 + p_2))}.$$

Aus der Gl. (3) folgt ein complexer Werth von μ_2 . Es ist daher m_2' von Null verschieden. Dies ist auf den ersten Anblick überraschend, da man hiernach an eine Absorption im Medium 2 denken sollte. Indess ist dies nicht der Fall. Die Wellennormale N_d im Medium 2 hat die Richtungscosinus $m_2/\sqrt{m_2^2 + p_2^2}$ gegen die x -Axe, $p_2/\sqrt{m_2^2 + p_2^2}$ gegen die z -Axe. Wenn man daher auf N_d um das Stück ρ fortschreitet, so ändert sich der Exponent von e um die Grösse:

$$-\frac{m_2 m_2' + p_2 p_2'}{2 \sqrt{m_2^2 + p_2^2}} \rho.$$

Diese hat aber den Werth Null, weil $\mu_2^2 + \pi_2^2$ eine reelle Grösse ist, d. h. die Lichtwelle pflanzt sich mit längs ihrer Wellennormalen constanter Amplitude fort; letztere variiert aber in der Wellenebene.¹⁾

Nennt man den Austrittswinkel der Wellennormale, d. h. den Winkel zwischen N_d und der Normale N_2 der zweiten Prismenfläche, welche ja die z -Axe ist, φ' , so ist:

$$(5) \quad \sin \varphi' = \frac{m_2}{\sqrt{m_2^2 + p_2^2}}.$$

Wir wollen jetzt die Formeln für den Fall specialisiren, dass der Prismenwinkel γ sehr klein ist. Dieser Fall ist in praxi stets erfüllt, weil die Prismen sonst nicht durchsichtig sind.

In der Formel (3) kann daher γ^2 für $\sin^2 \gamma$ gesetzt werden, für $\cos \gamma$ muss man bis zu γ^2 in der Entwicklung gehen,

1) Cf. W. Voigt, l. c. p. 153.

weil Glieder der Ordnung γ^2 in (3) auftreten. In dem Coëfficienten $2 \sin \varphi / \sqrt{\alpha_0} \cdot \mu_2$ von dem Gliede γ^2 kann man aber unbedenklich denjenigen Näherungswert von μ_2 einführen, welcher sich für $\gamma=0$ ergibt. Es ist dies $\mu_2 = \sin \varphi / \sqrt{\alpha_0}$. Gl. (3) wird daher:

$$\begin{aligned} \left(\mu_2 - \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\alpha_0}} \right)^2 &= \frac{\gamma^2}{\alpha_1} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \sin^2 \varphi \right), & \text{oder:} \\ (6) \quad \mu_2 &= \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\alpha_0}} - \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha_1}} \sqrt{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \sin^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Die Wurzel, mit welcher γ multiplicirt ist, ist positiv zu nehmen, wie sich aus dem Sinne ergibt, in welchem φ' positiv gerechnet ist (cf. die Fig. 1 auf p. 667).

Setzt man:

$$(7) \quad \frac{\sqrt{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \sin^2 \varphi}}{\sqrt{\alpha_1}} = a + bi,$$

so ist nach (4) und (6):

$$(8) \quad m_2 = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\alpha_0}} - a\gamma, \quad m_2' = b\gamma.$$

Nach (1) und (4) ist nun:

$$p_2^2 - p_2'^2 = \frac{1}{\alpha_2} - (m_2^2 - m_2'^2), \quad p_2 p_2' = m_2 m_2'.$$

Für p_2^2 erhält man daher eine quadratische Gleichung durch Elimination von p_2' aus diesen beiden Gleichungen. Berücksichtigt man nur diejenige Wurzel der quadratischen Gleichung, welche positives p_2^2 , d. h. reelles p_2 liefert, so erhält man:

$$2p_2^2 = \frac{1}{\alpha_2} - m_2^2 + m_2'^2 + \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha_2} - m_2^2 - m_2'^2 \right)^2 + \frac{4m_2'^2}{\alpha_2}}.$$

Der Ausdruck $1/\alpha_2 - m_2^2 - m_2'^2$ ist nun im allgemeinen gross gegen m_2' . Nur für solche Einfallswinkel φ sind beide Ausdrücke von gleicher Grössenordnung, für welche ist:

$$\sin^2 \varphi = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{n_2^2}{n_0^2},$$

d. h. für den Grenzwinkel der Totalreflexion an dem Medium 2. In den unten zu berechnenden Versuchen ist $n_0 = n_2$ zu setzen. Für nahezu streifende Incidenz würden daher jene beiden Ausdrücke gleiche Grössenordnung erhalten.

Indess müssen bei der Kleinheit der noch die Durchsicht gestattenden Prismenwinkel γ die Einfallswinkel sehr nahe an 90° fallen, damit beide Ausdrücke vergleichbar werden. Bei den zu berechnenden Versuchen ist γ kleiner als $15''$. Für $\varphi = 87^\circ$ würde sein bei den untersuchten Metallen:

$$\left(\frac{1}{\alpha_2} - m_2^2 - m_2'^2\right)^2 = 10^{-6}, \quad \frac{4m_2'^2}{\alpha_2} = 0,2 \cdot 10^{-6},$$

daher ist der letztere Ausdruck unbedenklich gegen den ersteren zu vernachlässigen, wenn man eben Einfallswinkel ausschliesst, die sich der streifenden Incidenz, resp. dem Winkel der Totalreflexion um mehr als 3° nähern.

Unter dieser Voraussetzung wird:

$$p_2^2 = \frac{1}{\alpha_2} - m_2^2,$$

und nach (5):

$$(9) \quad \sin \varphi' = m_2 \sqrt{\alpha_2} = \frac{m_2}{n_2} = \frac{n_0}{n_2} \left(\sin \varphi - \frac{a\gamma}{n_0} \right).$$

Die Grösse a ist durch die Gl. (7) definirt. Die dort auftretende complexe Grösse α_1 , welche die optische Natur des Metalles angibt, ist nun bei allen Metallen so klein, dass das Quadrat ihres Moduls gegen 1 vernachlässigt werden kann. Es ist also zu setzen:

$$a + bi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \sin^2 \varphi \right),$$

d. h. nach der Bedeutung von $\sqrt{\alpha_1}$ nach p. 666:

$$a = n \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \frac{n_0^2}{n^2(1 + \kappa^2)} \right)$$

und nach (9):

$$(10) \quad \sin \varphi' = \frac{n_0}{n_2} \left\{ \sin \varphi - \gamma \frac{n}{n_0} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \frac{n_0^2}{n^2(1 + \kappa^2)} \right) \right\}.$$

Wir erhalten einen Ausdruck für φ' , wie er aus dem Snellius'schen Brechungsgesetz folgen würde, ein Gesetz, welches Gültigkeit hätte, falls κ Null wäre, wenn man in dem nach Gl. (7) definirten Ausdruck für a den Werth von α_1 reell annimmt, d. h. $\kappa = 0$ setzt und diesen Werth von a in (9) substituirt. Es würde folgen:

$$(10') \quad (\sin \varphi') = \frac{n_0}{n_2} \left\{ \sin \varphi - \gamma \frac{n}{n_0} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \frac{n_0^2}{n^2}} \right\}.$$

Da man (10) auch schreiben kann:

$$(10'') \quad \sin \varphi' = \frac{n_0}{n_2} \left\{ \sin \varphi - \gamma \frac{n}{n_0} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \frac{n_0^2}{n^2(1+x^2)}} \right\},$$

so sieht man, dass durch Wirkung der Absorption das Licht mehr von der brechenden Kante des Prismas weg — gebrochen wird, d. h. dass für $n > n_0$ die Ablenkung des Lichtstrahles verstärkt wird.

In den genannten Versuchen von Du Bois und Rubens fiel das Licht nicht direct auf die Metallkeile, sondern durchsetzte zunächst eine Glasplatte. Auf derselben war ein Metalldoppelkeil niedergeschlagen, dessen Prismenwinkel γ_1 und γ_2 sein mögen; direct gemessen war der Einfallswinkel in Luft (i), die Summe der Prismenwinkel

$\gamma_1 + \gamma_2 = \beta$,
und die Richtungs-
differenz α der austre-
tenden Lichtstrahlen.

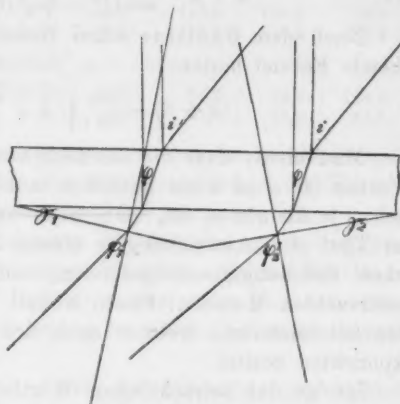


Fig. 2.

Führt man in der

Gl. (10) den Einfallswinkel i in Luft ein an Stelle des Einfallswinkels φ in Glas, so wird dieselbe:

$$(11) \quad \sin \varphi' = \sin i - \gamma n_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 i}{n_1^2 (1+x^2)} \right),$$

wo unter n_1 der Brechungsexponent des Metalles gegen Luft verstanden ist.

Nennt man die Austrittswinkel des Lichtes an beiden Metallprismen resp. φ_1' und φ_2' , so ist:

$$\sin \varphi_1' = \sin i - \gamma_1 n_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 i}{n_1^2 (1+x^2)} \right),$$

$$\sin \varphi_2' = \sin i + \gamma_2 n_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 i}{n_1^2 (1+x^2)} \right).$$

Setzt man $\varphi_1' = i + \epsilon_1$, $\varphi_2' = i + \epsilon_2$, wo ϵ kleine Winkel sind, für deren cos man 1 setzen kann, so ist:

$$\sin \varphi_1' = \sin i + \varepsilon_1 \cos i, \quad \sin \varphi_2' = \sin i + \varepsilon_2 \cos i,$$

$$\begin{aligned} \text{d. h.} \quad \varepsilon_1 - \varepsilon_2 &= \varphi_1' - \varphi_2' = \frac{\sin \varphi_1' - \sin \varphi_2'}{\cos i} \\ &= -\frac{\beta n_1}{\cos i} \left(1 - \frac{1}{n_1^2} \frac{\sin^2 i}{(1 + \kappa^2)} \right). \end{aligned}$$

Die Richtungsdivergenz α der beiden austretenden Wellennormalen ist offenbar gegeben durch:

$$\begin{aligned} \alpha &= \varphi_2' - \varphi_1' - \beta, & \text{daher:} \\ (12) \quad \alpha + \beta &= \frac{\beta n_1}{\cos i} \left(1 - \frac{1}{n_1^2} \frac{\sin^2 i}{(1 + \kappa^2)} \right). \end{aligned}$$

Nach dem Snellius'schen Gesetz würde die entsprechende Formel lauten:

$$(\alpha + \beta) = \frac{\beta n_1}{\cos i} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n_1^2}}.$$

Man sieht, dass die hiernach aus i und β berechneten Werthe für α zu klein ausfallen müssen, und zwar um so mehr, je kleiner n_1 ist. Du Bois und Rubens haben in der That eine Abweichung in diesem Sinne vom Snellius'schen Brechungsgesetz gefunden, und zwar von den drei untersuchten Metallen: Eisen, Kobalt und Nickel am stärksten bei letzterem, welches auch den kleinsten Brechungsexponenten besitzt.

Infolge des beträchtlichen Werthes, welchen $n_1^2(1 + \kappa^2)$ bei diesen Metallen besitzt, lässt sich die Formel (12) noch dadurch vereinfachen, dass man das jene Grösse im Nenner enthaltende Glied ganz fortlässt. Es wird dadurch höchstens ein Fehler von $2\frac{1}{2}$ Proc. herbeigeführt, und zwar erreicht er diesen Betrag nur beim Nickel, für welches $n^2(1 + \kappa^2)$ am kleinsten ist (für rothes Licht ca. 16), und auch dort nur für den grössten, bei den Untersuchungen angewandten Einfallswinkel ($\varphi = 65^\circ$). Die Formel (12) schreibt sich dann:

$$(13) \quad \alpha + \beta = n_1 \frac{\beta}{\cos i}.$$

In der folgenden Tabelle stelle ich die nach dieser Formel berechneten Werthe mit den von den Herren Du Bois und Rubens beobachteten zusammen. Es ist so verfahren, dass für n_1 zunächst der Mittelwerth der sich aus den Einzelbeobachtungen nach Formel (13) berechneten Werthen ange-

nommen wurde (er ist neben die Namen der Metalle gesetzt), und dann mit Hülfe dieses Mittelwerthes die Ablenkungen α zurückberechnet wurden.

Eisen. $n_1 = 3,01$.

i	0°	30°	40°	50°	55°	60°	65°
α beob.	51,7''	66,7	73,8	98,5	107,8	125,7	153,9
α ber.	51,7	63,8	75,3	94,6	108,9	129,0	156,7

Cobalt. $n_1 = 3,16$.

α beob.	47,0	61,2	72,2	95,1	113,0	124,0	152,4
α ber.	51,0	62,5	73,6	92,2	106,1	125,3	152,4

Nickel. $n_1 = 1,91$.

α beob.	27,3	31,3	36,8	51,0	61,2	84,4	114,4
α ber.	25,2	33,3	41,3	54,6	64,7	75,5	97,7

Die Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Werthen ist eine sehr gute, sodass die Formel (13) als durch den Versuch bestätigt anzusehen ist.

Die nach (13) berechneten Mittelwerthe von n_1 weichen nur wenig ab von denjenigen Werthen, welche Du Bois und Rubens aus den Beobachtungen unter kleineren Einfallswinkeln bei Zugrundelegung der gewöhnlichen Brechungsformel gefunden haben.

Da die Formel (13) durch die Beobachtungen vollauf bestätigt wird, wodurch man in den Stand gesetzt ist, auch bei schiefem Einfall den Brechungsexponenten streng zu berechnen, so empfiehlt sich, zu seiner Bestimmung die Brechung bei schiefem Einfall zu beobachten, wie die Herren Du Bois und Rubens vorschlugen, weil dadurch die Ablenkungen vergrößert werden. Es ist allerdings dabei nicht ausser acht zu lassen, dass kleine Unebenheiten des Prismas dann auch grössere Fehler in α hervorrufen.

Bei Anwendung der Formel (13) ist jedesmal zu prüfen, ob $n^2(1 + \kappa^2)$ für das betreffende Metall genügend gross ist. Wenn dies auch für die bei weitem meisten zutrifft, so gibt es doch einige Ausnahmen, z. B. Kupfer und Gold. Für diese Metalle ist die strengere Formel (12) anzuwenden.

Göttingen, November 1890.

XII. Ueber die Moleculartheorie der Elasticität fester Körper; von G. J. Michaëlis.

Die Theorie des Gleichgewichts eines Systems beliebig gestalteter gleicher Molecüle, welche Hr. Warburg¹⁾ aufgestellt hat, erklärt qualitativ die Erscheinungen der elastischen Nachwirkung. Ich habe gezeigt²⁾, wie durch Einführung von Kräften, welche die Molecüle in ihren ursprünglichen Richtungen festzuhalten bestrebt sind, die Ergebnisse der Theorie besser mit der Erfahrung in Uebereinstimmung gebracht werden können, ohne auf Betrachtungen über die Entstehungsweise einzugehen. Solche Kräfte können aber aus der Voraussetzung entwickelt werden, dass bei den elastischen Erscheinungen die Wechselwirkung der Molecüle nur in kleinen Entfernungen merklich ist, dass demzufolge die Theilchen in einer Wirkungssphäre als parallel betrachtet werden können und ihre Schwerpunkte nicht gleichförmig angeordnet sind, wenn auch die mittlere Anordnung in einem endlichen Theil des Körpers isotrop ist.

§ 1. Ich nehme an, dass zwischen den Punkten zweier gleichen Molecüle Kräfte wirken, welche verschiedene Functionen der Entfernungen sind. Der Abstand von zwei Punkten A und A' werde mit r , der Abstand der Schwerpunkte mit R bezeichnet. Es sei $F(r)$ das Potential von A auf A' . In Bezug auf zwei rechtwinklige Coordinatensysteme, welche in beiden Molecülen gleiche Lagen haben, gilt die Entwicklung, bis auf Glieder zweiter Ordnung genau:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} F(r) &= F + \left(\frac{1}{\partial x} h + \frac{1}{\partial y} k + \frac{1}{\partial z} l \right) dF \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\partial x} h + \frac{1}{\partial y} k + \frac{1}{\partial z} l \right)^2 d^2 F, \end{aligned} \right.$$

wenn F der Werth von $F(r)$ für $r = R$ ist.

1) Warburg, Wied. Ann. 4. p. 232. 1878.

2) G. J. Michaëlis, Wied. Ann. 17. p. 726. 1892.

Das Potential $U = \sum F(r)$ der Molecüle aufeinander ist, wenn ihre Axen parallel sind, eine Function der relativen Coordinaten ihrer Schwerpunkte. Ich setze, um complicirten Rechnungen zu entgehen, in den Molecülen drei rechtwinklige Symmetrieebenen voraus, von denen zwei gleichwerthig sind. Dann wird:

$$(2) \quad U = \sum \left\{ F + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) \right\}.$$

Dieser Ausdruck gilt auch, wenn zwei Punkte, von denen der eine bezüglich der yz -Ebene das Spiegelbild des andern ist, entgegengesetzte Eigenschaften haben, wie es in Magneten der Fall ist.

Durch den Schwerpunkt des einen Molecüls denken wir uns drei rechtwinklige Axen ξ, η, ζ gelegt, welche im Raum feste Richtungen behalten mögen; α, β, γ seien die Richtungs-cosinus der x -Axe in Bezug auf die neuen Axen. Setzt man diese in die Gleichung (2) ein, so kann das Potential von allen in der Wirkungssphäre des betrachteten Theilchens enthaltenen Molecülen auf dieses, in der symbolischen Form geschrieben werden:

$$(3) \quad U_1 = \frac{1}{2} \sum (h^2 - k^2) \left(\alpha \frac{\partial F}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial F}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial F}{\partial \zeta} \right)^2.$$

Es wird nämlich nur der von den Richtungs-cosinus abhängige Theil des Potentials in Betracht gezogen.

Wenn die Anordnung der Schwerpunkte in der Wirkungssphäre symmetrisch zur ξ -Axe ist, findet sich:

$$(4) \quad U_1 = \frac{1}{2} \alpha^2 \sum (h^2 - k^2) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) = G \cos^2 p.$$

Die Molecüle sind daher im stabilen Gleichgewichte, wenn die x -Axen mit der ξ -Axe zusammenfallen. Haben sie, durch irgend eine Ursache, eine gleich grosse Drehung erfahren, so ist das zurücktreibende Moment:

$$(5) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial U_1}{\partial p} = -\frac{1}{2} G \sin 2p.$$

Bei allgemeineren Voraussetzungen ergibt sich, dass die Molecüle im Gleichgewicht sind, wenn Axen, welche von den ursprünglichen Entfernungen der Schwerpunkte abhängig sind, mit bestimmten Richtungen der Wirkungssphäre zusammenfallen.

Das System erleide eine kleine virtuelle Deformation; die Coordinaten ξ, η, ζ eines Punktes ändern sich nach der gewöhnlichen Ausdrucksweise in:

$$(6) \quad \begin{cases} \xi + v_\xi \xi + u_\eta \eta + u_\zeta \zeta, \\ \eta + v_\xi \xi + v_\eta \eta + v_\zeta \zeta, \\ \zeta + v_\xi \xi + v_\eta \eta + v_\zeta \zeta. \end{cases}$$

Setzt man diese Werthe in (3) ein, so findet man für den Theil des Potentials, der mit v_ξ, v_η u. s. w. proportional ist, wenn man in demselben den Einfluss der Anisotropie vernachlässigt und die Hauptaxen des Elasticitäts-Ellipsoids zu den ξ, η, ζ -Axen wählt:

$$(7) \quad V = \frac{1}{2} \Sigma (h^2 - k^2) (\alpha^2 v_\xi + \beta^2 v_\eta + \gamma^2 v_\zeta) \left(\xi \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \xi \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right) \\ = Q (\alpha^2 v_\xi + \beta^2 v_\eta + \gamma^2 v_\zeta).$$

Hieraus kann gefolgert werden, dass nach einer Formänderung des Körpers zwei Drehungsmomente auf jedes Molecül wirken: das eine ist bestrebt, seine Axen parallel den Hauptaxen des Elasticitäts-Ellipsoids einzustellen, das andere, sie in die früheren Lagen zurückzudrängen.

§ 2. Das elastische Potential eines Körpers kann aus der Theorie abgeleitet werden. Es seien p_1, p_2, p_3 die Componenten der Drehung, welche ein Molecül nach den festen Axen erfahren hat, nachdem der Schwerpunkt in einer neuen Gleichgewichtslage angelangt ist. Die äusseren Kräfte, welche auf der Oberfläche des Körpers angreifen, werden als sehr klein betrachtet. Sind jetzt im natürlichen Zustande des Körpers die x, y, z -Axen mit den ξ, η, ζ -Axen gleich gerichtet, so verwandeln sich die Coordinaten (xyz) eines Punktes der Wirkungssphäre in:

$$(8) \quad \begin{cases} \xi + v_\xi \xi + (u_\eta + p_3) \eta + (u_\zeta - p_2) \zeta = \xi + \delta \xi, \\ \eta + (v_\xi - p_3) \xi + v_\eta \eta + (v_\zeta + p_1) \zeta = \eta + \delta \eta, \\ \zeta + (v_\xi + p_2) \xi + (v_\eta - p_1) \eta + v_\zeta \zeta = \zeta + \delta \zeta. \end{cases}$$

Das Potential $\Sigma f(xyz)$ von den in der Wirkungssphäre vorhandenen Molecülen auf ersteres ist bis auf Glieder zweiter Ordnung genau:

$$\Sigma \left\{ f(\xi \eta \zeta) + \delta \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + \delta \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} + \delta \zeta \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \left(\delta \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + \delta \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} + \delta \zeta \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right)^2 \right\}.$$

Ich betrachte zunächst die Glieder zweiten Grades. Ueber zusammensetzung und Anordnung der Theilchen werden jetzt

keine besonderen Voraussetzungen getroffen. Es sei n die Anzahl der Molecüle in einer Volumeneinheit des Körpers. Wären alle parallel, so würde $W = n/2 \sum f(xyz)$ das Potential der Wechselwirkung sein. Um die Spannungen zu berechnen, werde dem System, nachdem die Schwerpunkte in die Gleichgewichtslagen gekommen sind, eine unendlich kleine Deformation ertheilt, indem dabei die Richtungen der Molecularachsen unvariirt bleiben. Die Arbeit ist $\sum (\partial W / \partial u_i) \delta u_i$. — Somit erhalten die Spannungen die Werthe:

$$(9) \quad X_\xi = \frac{\partial W}{\partial u_\xi}; \quad X_\eta = \frac{\partial W}{\partial u_\eta}; \quad X_\zeta = \frac{\partial W}{\partial u_\zeta} \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen sind bekanntlich:

$$X_\eta = Y_\xi; \quad Z_\xi = X_\zeta; \quad Y_\zeta = Z_\eta.$$

Erstere Gleichung kann in die Form gebracht werden:

$$(10) \quad T_1 + p_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial v_\zeta} - \frac{\partial T_1}{\partial w_\eta} \right) + p_2 \left(\frac{\partial T_1}{\partial w_\xi} - \frac{\partial T_1}{\partial u_\zeta} \right) + p_3 \left(\frac{\partial T_1}{\partial u_\eta} - \frac{\partial T_1}{\partial v_\xi} \right) = 0.$$

T_1 ist eine homogene Function ersten Grades der Grössen u_ξ, u_η u. s. w. und demnach $= \sum \partial T_1 / \partial u_\xi \cdot u_\xi$. In den beiden anderen Gleichungen werden die Symbole T_2 und T_3 in gleicher Weise benutzt.

Werden aus diesen Gleichungen p_1, p_2, p_3 aufgelöst und die erhaltenen Werthe in die Formeln (9) eingeführt, so wird der Coefficient von u_ξ in X_ξ :

$$(11) \quad \frac{1}{D} \begin{vmatrix} -\frac{\partial^2 W}{\partial u_\xi^2} & \frac{\partial T_1}{\partial u_\xi} & \frac{\partial T_2}{\partial u_\xi} & \frac{\partial T_3}{\partial u_\xi} \\ \frac{\partial T_1}{\partial u_\xi} & \frac{\partial T_1}{\partial v_\xi} - \frac{\partial T_1}{\partial u_\eta} & \frac{\partial T_2}{\partial v_\xi} - \frac{\partial T_2}{\partial u_\eta} & \frac{\partial T_3}{\partial v_\xi} - \frac{\partial T_3}{\partial u_\eta} \\ \frac{\partial T_2}{\partial u_\xi} & \frac{\partial T_1}{\partial w_\zeta} - \frac{\partial T_1}{\partial w_\xi} & \frac{\partial T_2}{\partial w_\zeta} - \frac{\partial T_2}{\partial w_\xi} & \frac{\partial T_3}{\partial w_\zeta} - \frac{\partial T_3}{\partial w_\xi} \\ \frac{\partial T_3}{\partial u_\xi} & \frac{\partial T_1}{\partial w_\eta} - \frac{\partial T_1}{\partial v_\zeta} & \frac{\partial T_2}{\partial w_\eta} - \frac{\partial T_2}{\partial v_\zeta} & \frac{\partial T_3}{\partial w_\eta} - \frac{\partial T_3}{\partial v_\zeta} \end{vmatrix}$$

D ist die Determinante der Coefficienten von p_1, p_2, p_3 in den Gleichungen (10). Der Factor von u_η wird aus (11) abgeleitet durch Vertauschung der ersten Horizontalreihe mit:

$$(12) \quad -\frac{\partial^2 W}{\partial u_\xi \partial u_\eta}, \quad \frac{\partial T_1}{\partial u_\eta}, \quad \frac{\partial T_2}{\partial u_\eta}, \quad \frac{\partial T_3}{\partial u_\eta}.$$

Man ersieht leicht, dass die Determinanten, welche mit u_η und mit v_ξ multiplicirt sind, einander gleich sind. Der Coëfficient von u_ξ in der Spannung X_η wird aus (11) erhalten durch Vertauschung der ersten Verticalreihe mit den Grössen (12). Verwechselt man in (11) die erste Horizontal- und Verticalreihe mit $-W$, T_1 , T_2 , T_3 , so können die Ausdrücke aller Spannungen aus derselben entwickelt werden. Der Coëfficient von v_η in X_η findet man z. B. durch Differentiation der einen Reihe nach u_η , der anderen nach v_η . Wird ein solcher Ausdruck mit $\Delta_{v_\eta}^{u_\eta}$ bezeichnet, dann bestimmen:

$$\Delta_{u_\xi}^{u_\xi}, \quad \Delta_{u_\xi}^{u_\eta} \text{ u. s. w.}$$

die Spannungen. Da ein oberer Index mit einem unteren vertauscht werden darf, ergeben sich 21 Coëfficienten, die im allgemeinen alle verschieden sind.

W ist somit eine homogene Function zweiten Grades von u_ξ , v_η , w_ζ , $(u_\eta + v_\xi)$, $(u_\zeta + w_\xi)$, $(w_\eta + v_\zeta)$.

Um W zu berechnen bei der Annahme, dass in der Volumeneinheit alle möglichen Axenrichtungen in gleicher Weise vertreten sind, muss die Function auf beliebige Coordinatenaxen bezogen und der Mittelwerth bestimmt werden. Diese Rechnung ist von W. Voigt¹⁾ ausgeführt. Das Potential eines isotropen Körpers enthält dann zwei unabhängige Constanten.

§ 3. Die Glieder ersten Grades der Grössen u_ξ , v_η u. s. w. ergeben Spannungen, welche blos durch die Drehungen der Molecüle andere Werthe erhalten. Um in einem einfachen Falle den Einfluss einer solchen Drehung zu berechnen, gehe ich aus von den speciellen Annahmen im § 1. Zunächst mögen die Molecüle in einer Volumeneinheit wieder alle als gleichgerichtet betrachtet werden. Setzt man $W_1 = \frac{1}{2} n V$, indem n die Anzahl der Molecüle und V die Function (7) bedeutet, so erhält man in gleicher Weise, wie im § 2 die Formeln:

$$(13) \quad X'_\xi = \frac{\partial W_1}{\partial u_\xi}, \quad X'_\eta = \frac{\partial W_1}{\partial u_\eta}, \quad X'_\zeta = \frac{\partial W_1}{\partial u_\zeta} \text{ u. s. w.}$$

Es sei ein Cylinder im Gleichgewichte unter der Wir-

1) W. Voigt, Abhandl. d. Gött. Acad. 34.

kung von zwei Kräften, welche auf seinen Endflächen, parallel seiner Axe angreifen. Die Formänderung ist dann bestimmt durch:

$$u_z = \lambda, \quad v_y = -\mu\lambda, \quad w_z = -\mu\lambda.$$

Die Winkel, welche die x -Axen der Molecüle mit der Axe des Körpers bilden, werden im natürlichen Zustande mit q_1 , nach der Drehung mit q_2 bezeichnet. Dann ist:

$$W_1 = \frac{1}{2} n Q [\cos^2 q_2 (1 + \mu) \lambda - \mu \lambda].$$

Das Drehungsmoment, das mit λ proportional ist, erhält den Werth:

$$\frac{1}{n} \frac{\partial W_1}{\partial q_2} = -\frac{1}{2} Q (1 + \mu) \lambda \sin 2q_2.$$

Es muss dem Drehungsmomente (5) gleich sein. Die Gleichgewichtsbedingung ist daher:

$$G \sin 2p = Q (1 + \mu) \lambda \sin 2q_2.$$

Hier aber ist:

$$p = q_1 - q_2.$$

$$\text{Also:} \quad \cos 2q_2 = \frac{K + \cos 2q_1}{\sqrt{1 + 2K \cos 2q_1 + K^2}},$$

wenn $K = Q(1 + \mu)\lambda/G$ ist.

Die Spannungsdifferenz ist:

$$X_z'' - X_z' = \frac{1}{2} n Q (\cos^2 q_2 - \cos^2 q_1).$$

Sind aber die Molecularaxen nach allen Richtungen in gleicher Weise vertreten, dann muss dieser Ausdruck mit $\frac{1}{2} \sin q_1 dq_1$ multiplicirt und zwischen den Grenzen 0 und π integrirt werden. Man findet, wenn K eine kleine Grösse ist, nahezu:

$$X_z'' - X_z' = n Q \left(\frac{2}{15} K + \frac{1}{15} K^2 \right).$$

Es entsteht durch die Drehung der Molecüle eine Spannungsdifferenz, welche der äusseren Kraft ungefähr proportional ist, wie bei der elastischen Nachwirkung beobachtet wird.

§ 4. Wirkt auf den Cylinder eine magnetische Kraft X in der Richtung seiner Axe, so hat das Moment, das von der Anisotropie einer Wirkungssphäre herrührt, wahrscheinlich eine untergeordnete Bedeutung. Die magnetische Wechselwirkung ist nämlich auch in endlichen Entfernungen wirksam. Es entwickelt sich dennoch auch hier während der Drehung ein zurückführendes Moment, das durch die

Chwolson'sche Theorie erklärt¹⁾ wird. Die bekannte Weber'sche Gleichung für das Gleichgewicht eines Molecüls, die, wie aus der genannten Theorie hervorgeht, nur annähernd richtig ist, lautet, wenn D die Directionskraft ist:

$$X \sin q_2 = D \sin (q_1 - q_2)$$

oder, wenn:

$$\frac{X}{D} = K_1$$

gesetzt wird:

$$\cos^2 q_2 = \frac{(K_1 + \cos q_1)^2}{K_1^2 + 2 K_1 \cos q_1 + 1}.$$

Substituirt man diesen Werth in der ersteren der Formeln (13), so findet man:

$$X'' - X' = \frac{1}{2} Q n \sin^2 q_1 \frac{K_1 (K_1 + 2 \cos q_1)}{K_1^2 + 2 K_1 \cos q_1 + 1}.$$

Es muss jetzt wieder mit $\frac{1}{2} \sin q_1 dq_1$ multiplicirt und zwischen den Grenzen 0 und π integrirt werden. Ist K_1 eine kleine Grösse und werden Glieder von der dritten und höheren Ordnung vernachlässigt, so ist:

$$X'' - X' = \frac{1}{15} Q n K_1^2.$$

Die Theorie ergibt eine Spannungsdifferenz, welche nahezu der zweiten Potenz der äusseren magnetischen Kraft proportional ist. Dieses Resultat ist im Einklange mit der Beobachtung, dass ein Eisenstab, der magnetisirt wird, eine Verlängerung erleidet, welche mit der zweiten Potenz der Magnetisirung proportional ist.

Arnheim, 26. Januar 1891.

1) Chwolson, Pogg. Ann. Ergbd. 7. p. 53. 1876.

Berichtigung.

Bd. XLII. (R. Sissingh.) p. 115 Z. 7 v. u. lies „ungeschwächt“ statt „nicht ungeschwächt“.

p. 111 Z. 6 v. u. lies „einige Quadratmillimeter“ statt „Quadratcentimeter“.

e
-
r
t:
l:

r-

d
e
e-

e
ft
er
ne
er

tt
all

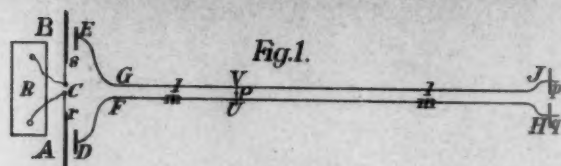


Fig. 1.

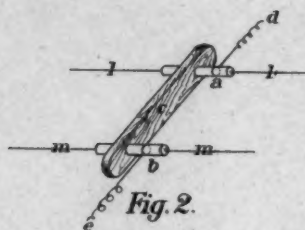


Fig. 2.

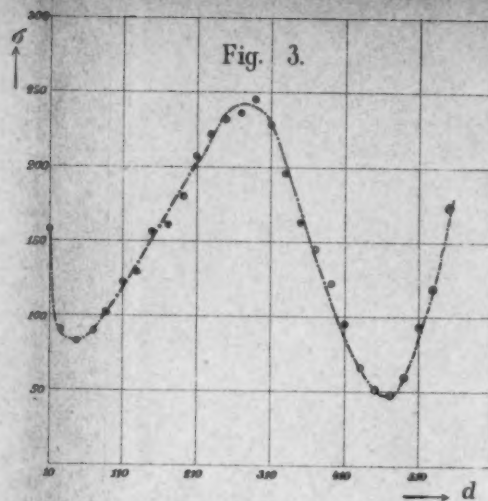


Fig. 3.

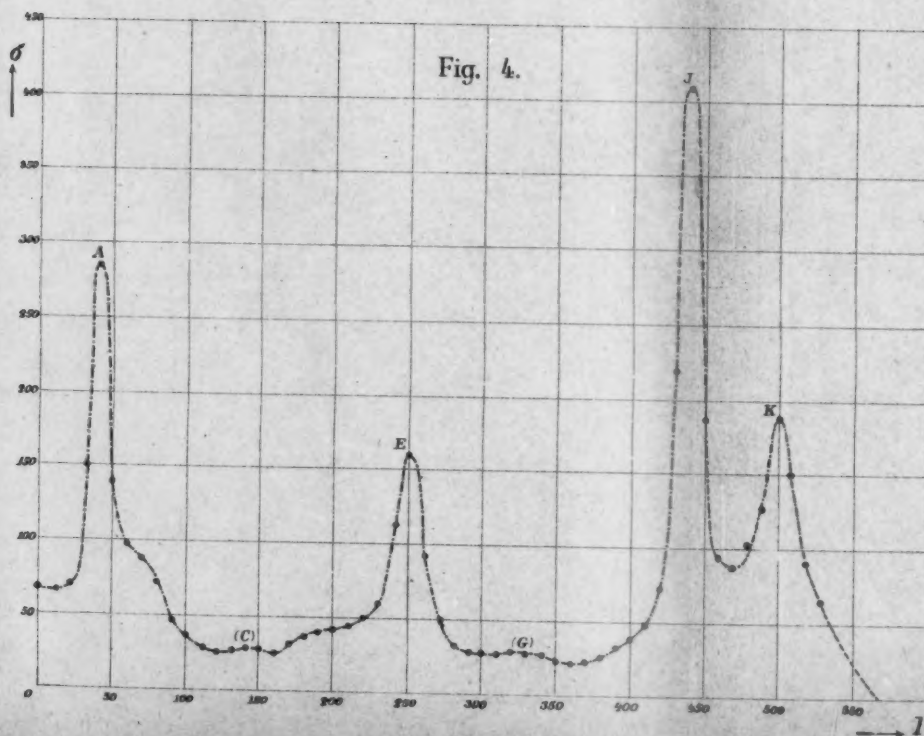
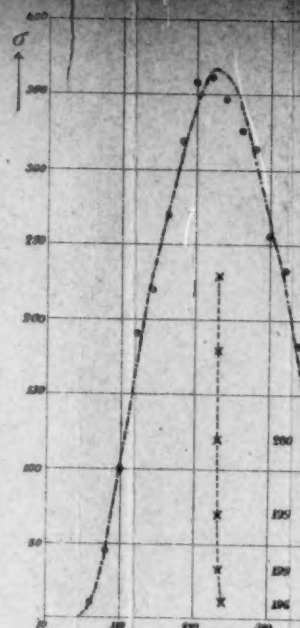


Fig. 4.

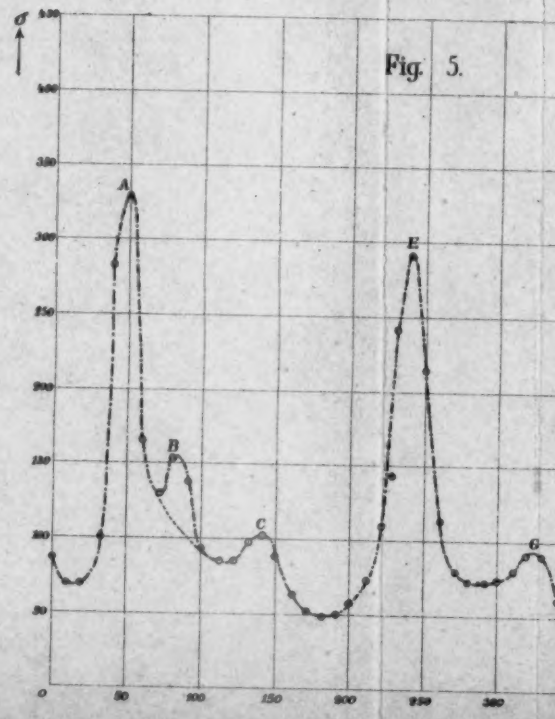
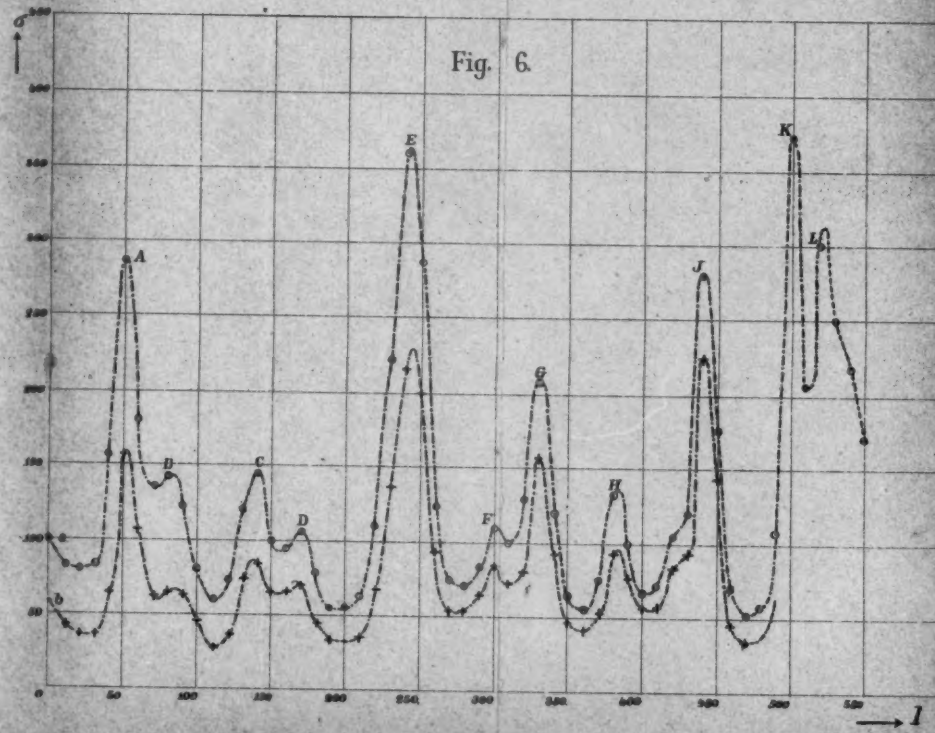
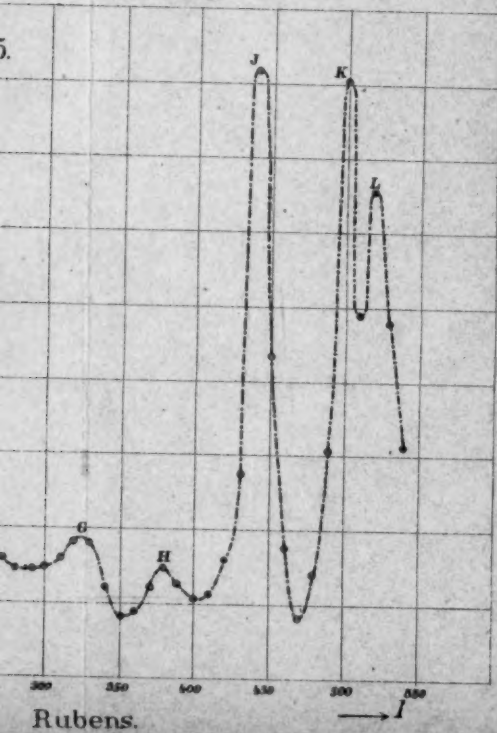
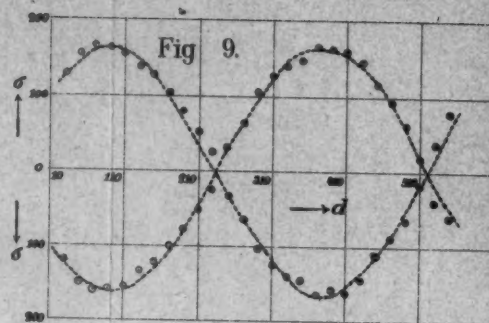
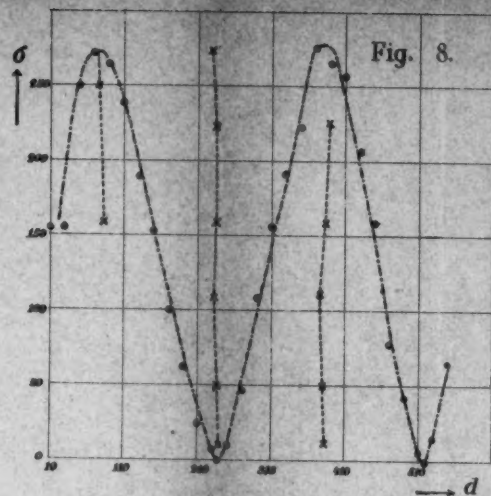


Fig. 5.



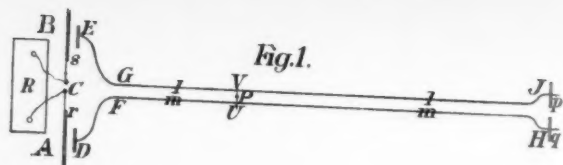


Fig. 1.

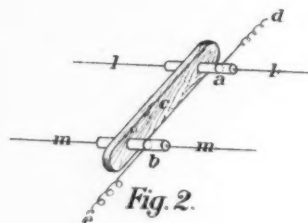


Fig. 2.

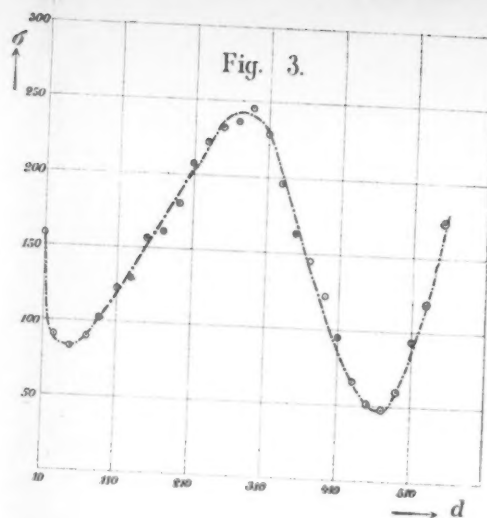


Fig. 3.

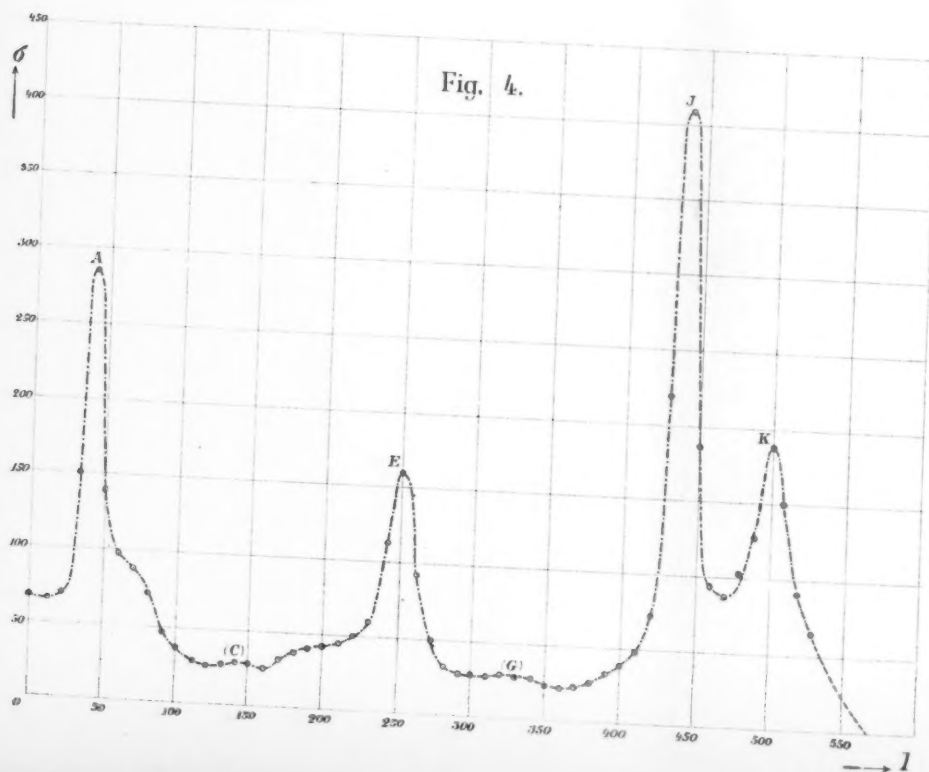
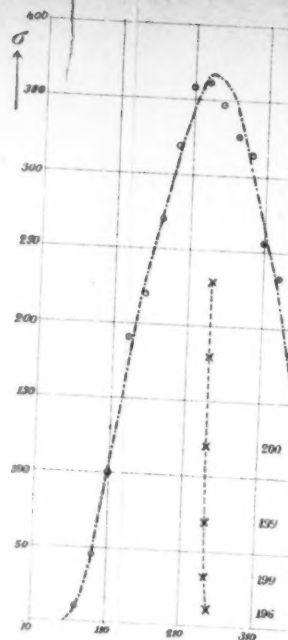


Fig. 4.

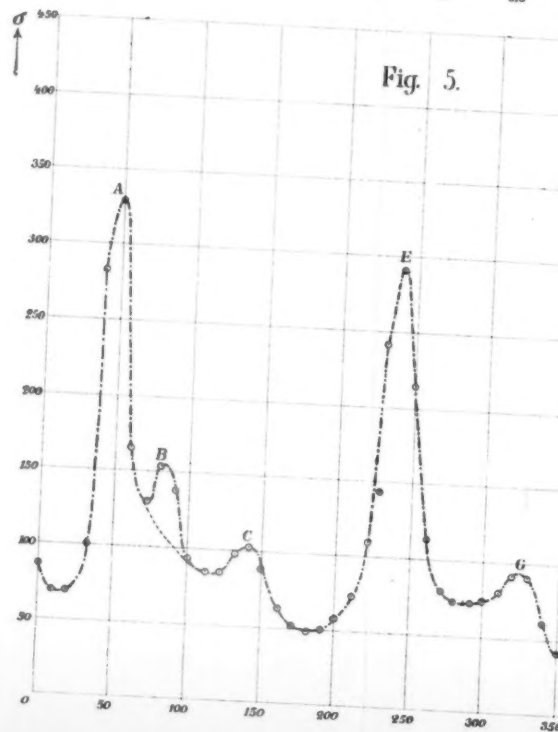


Fig. 5.

Fig. 7

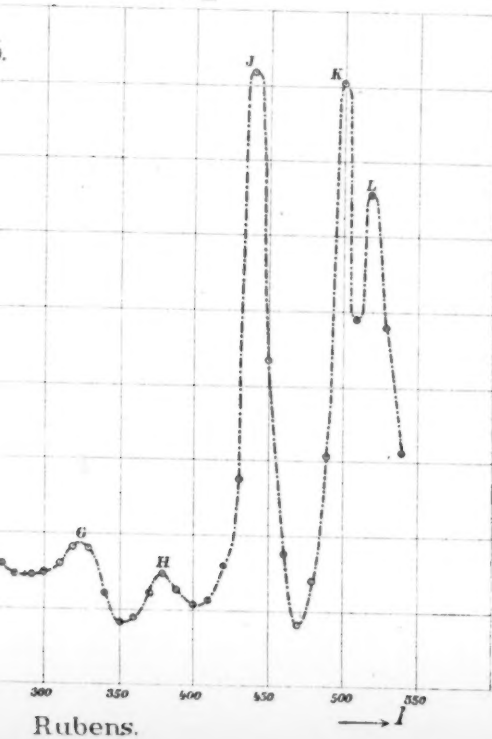
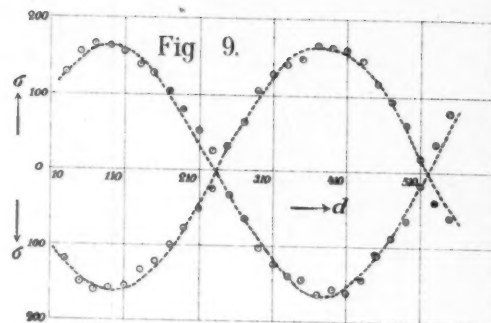
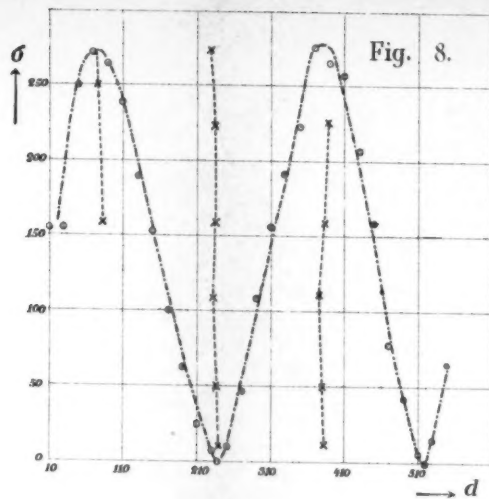
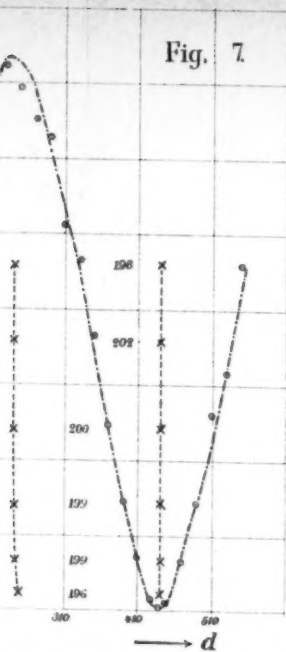
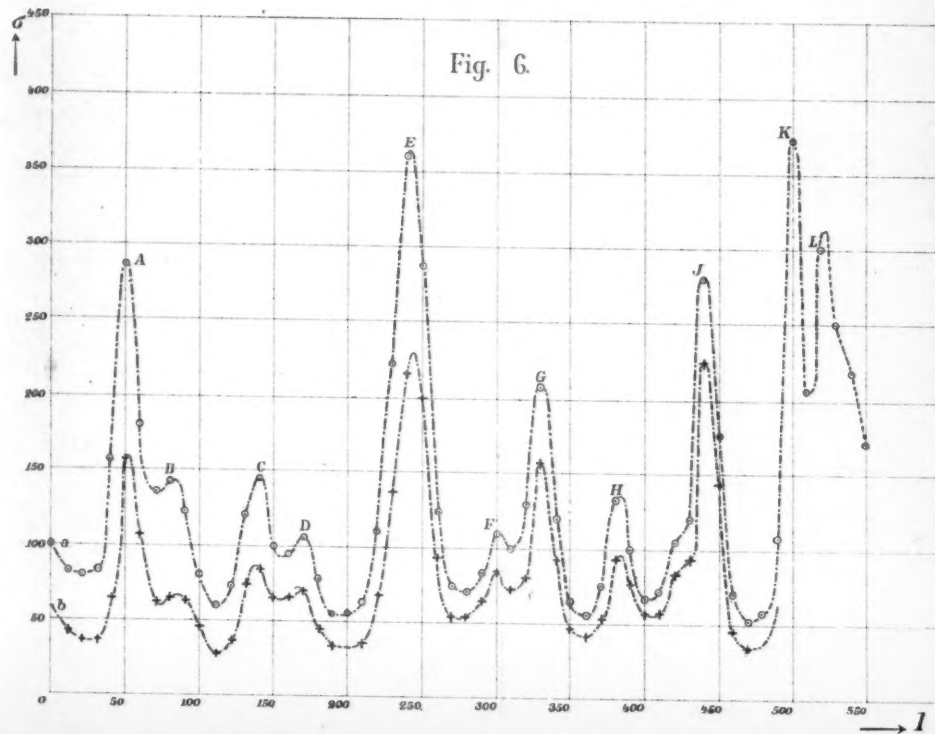


Fig. 6.



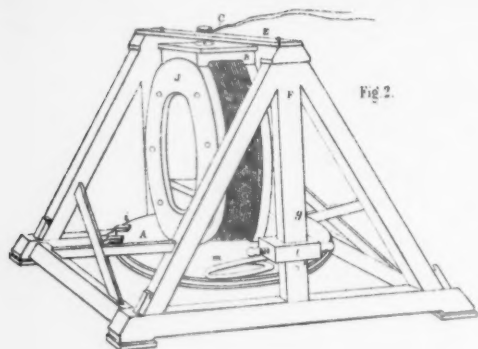


Fig. 2.

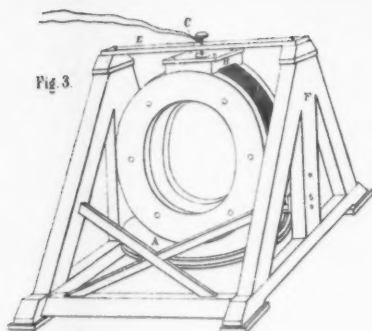


Fig. 3.

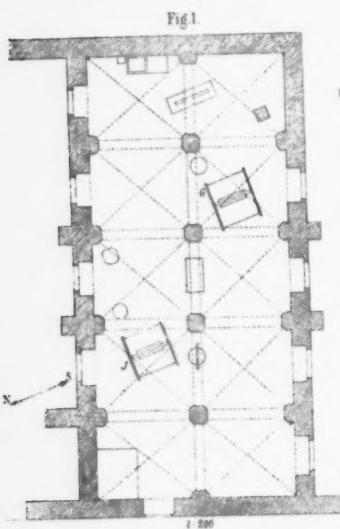


Fig. 1.

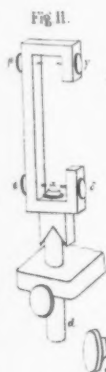


Fig. 11.



Fig. 4.

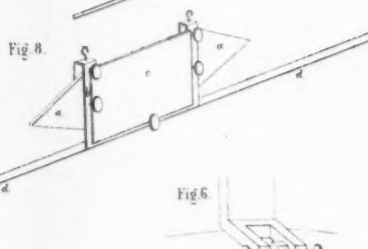


Fig. 8.



Fig. 5.

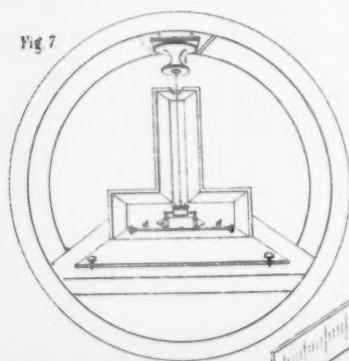


Fig. 7.

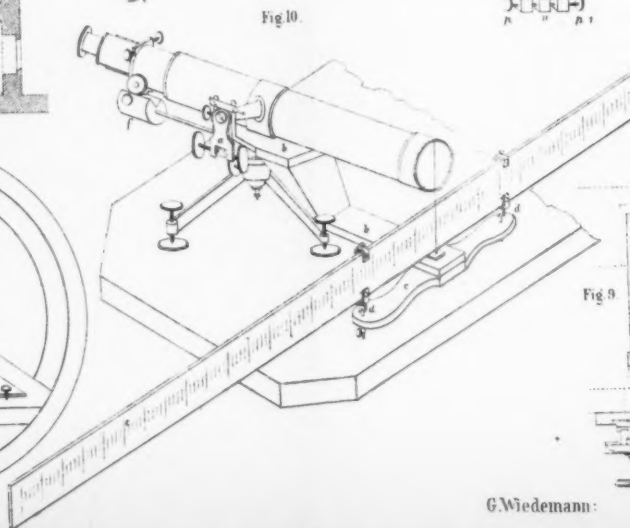


Fig. 10.

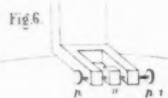


Fig. 6.

Fig. 9.

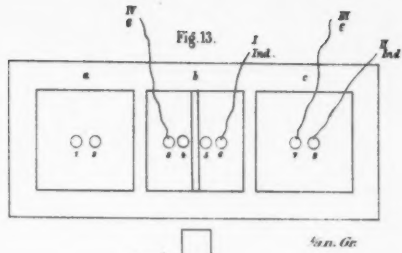
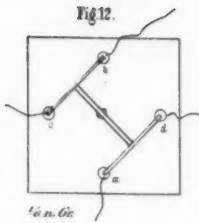
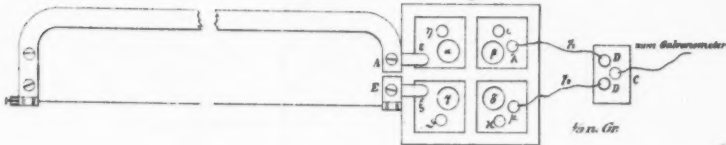


Fig. 14.



neu. Galvanometer

Fig. 15.

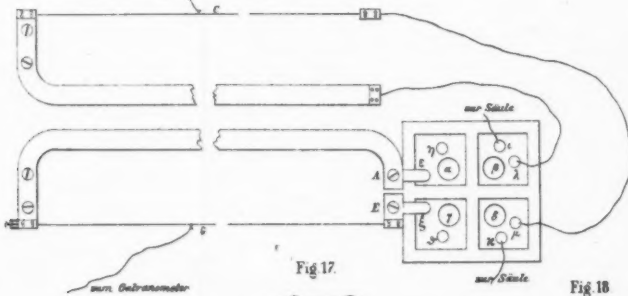


Fig. 17.

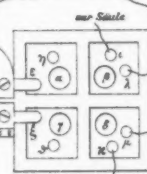


Fig. 18.

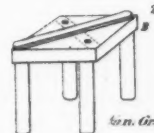


Fig. 16.

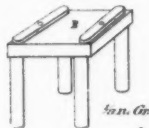
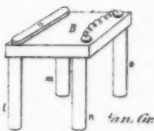


Fig. 20.



Fig. 19.

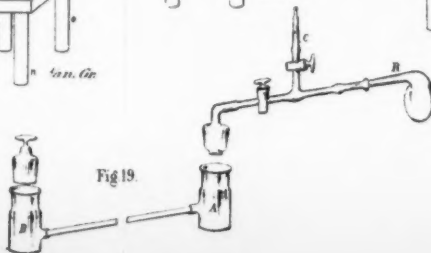
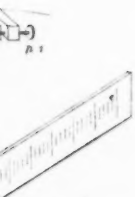
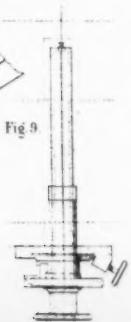
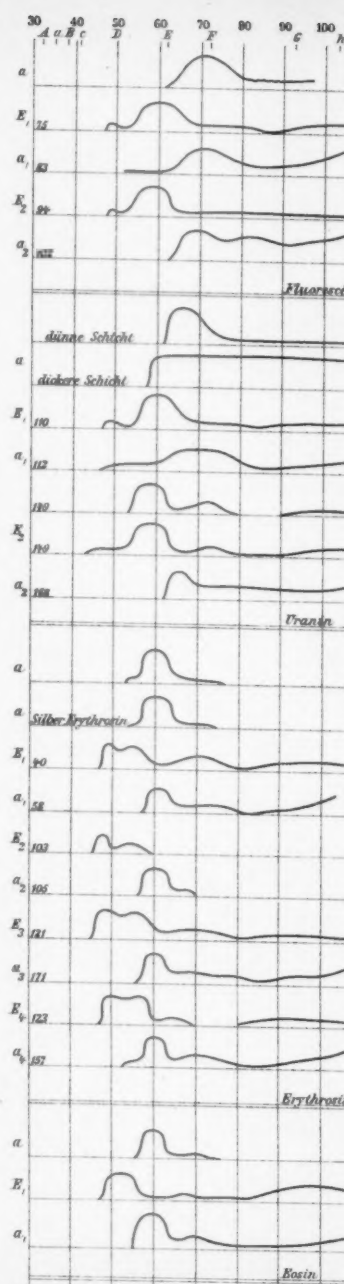
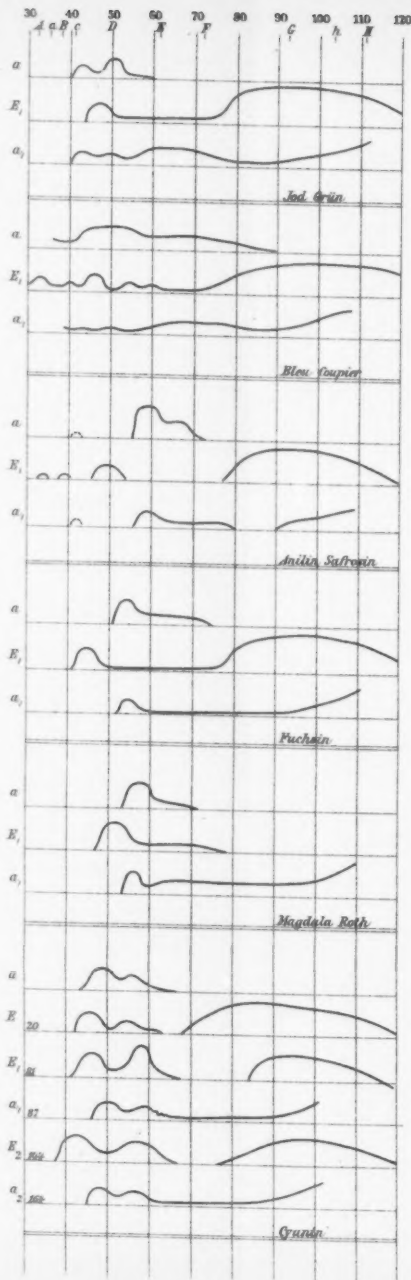
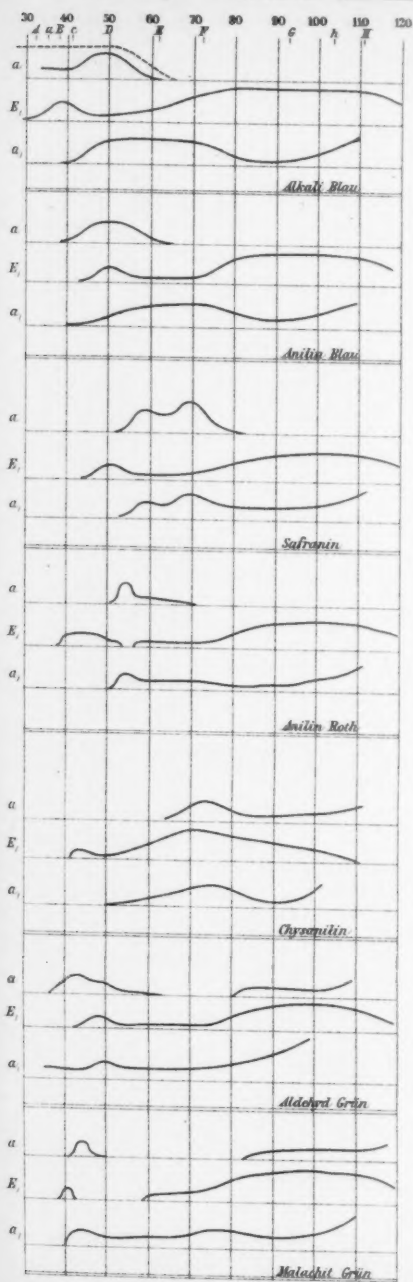
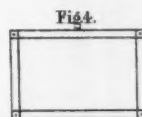
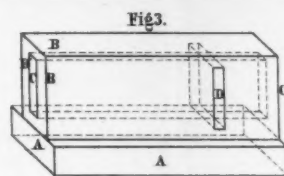
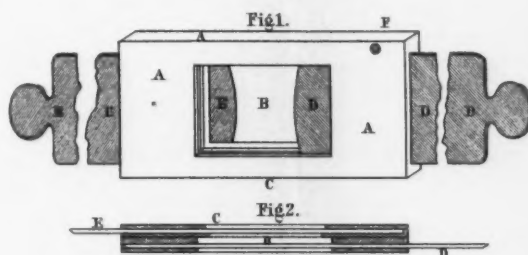
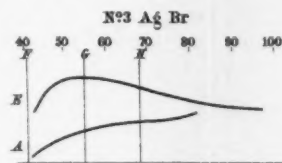
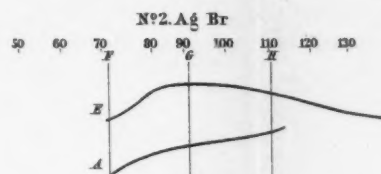
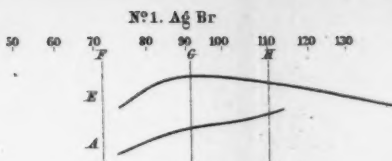
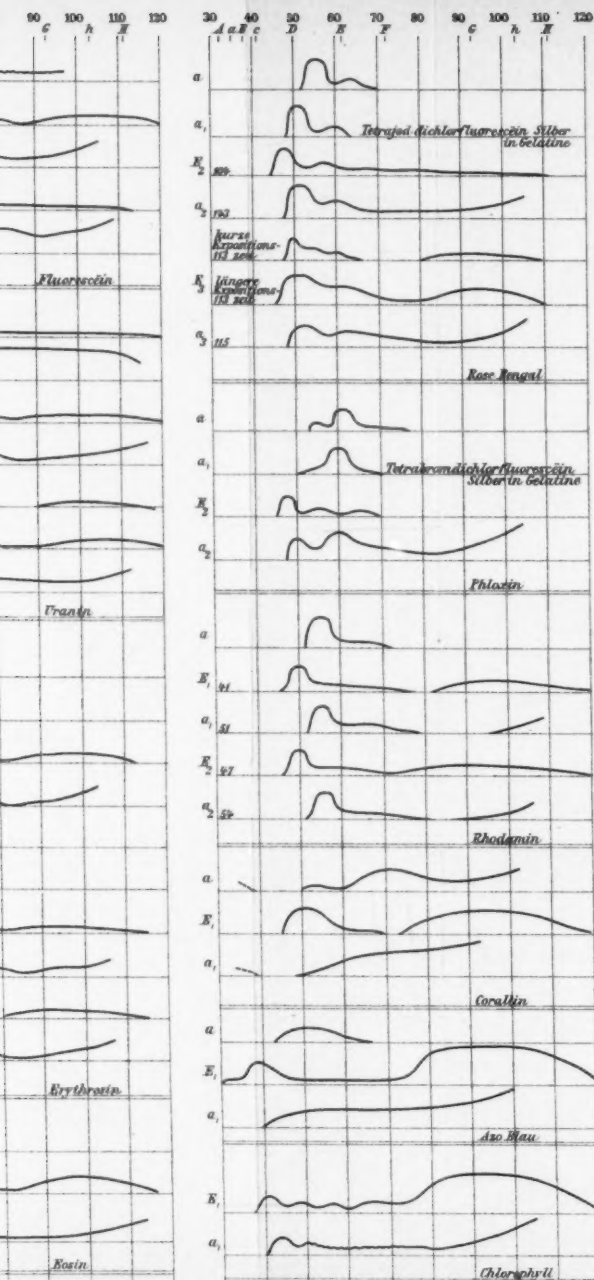
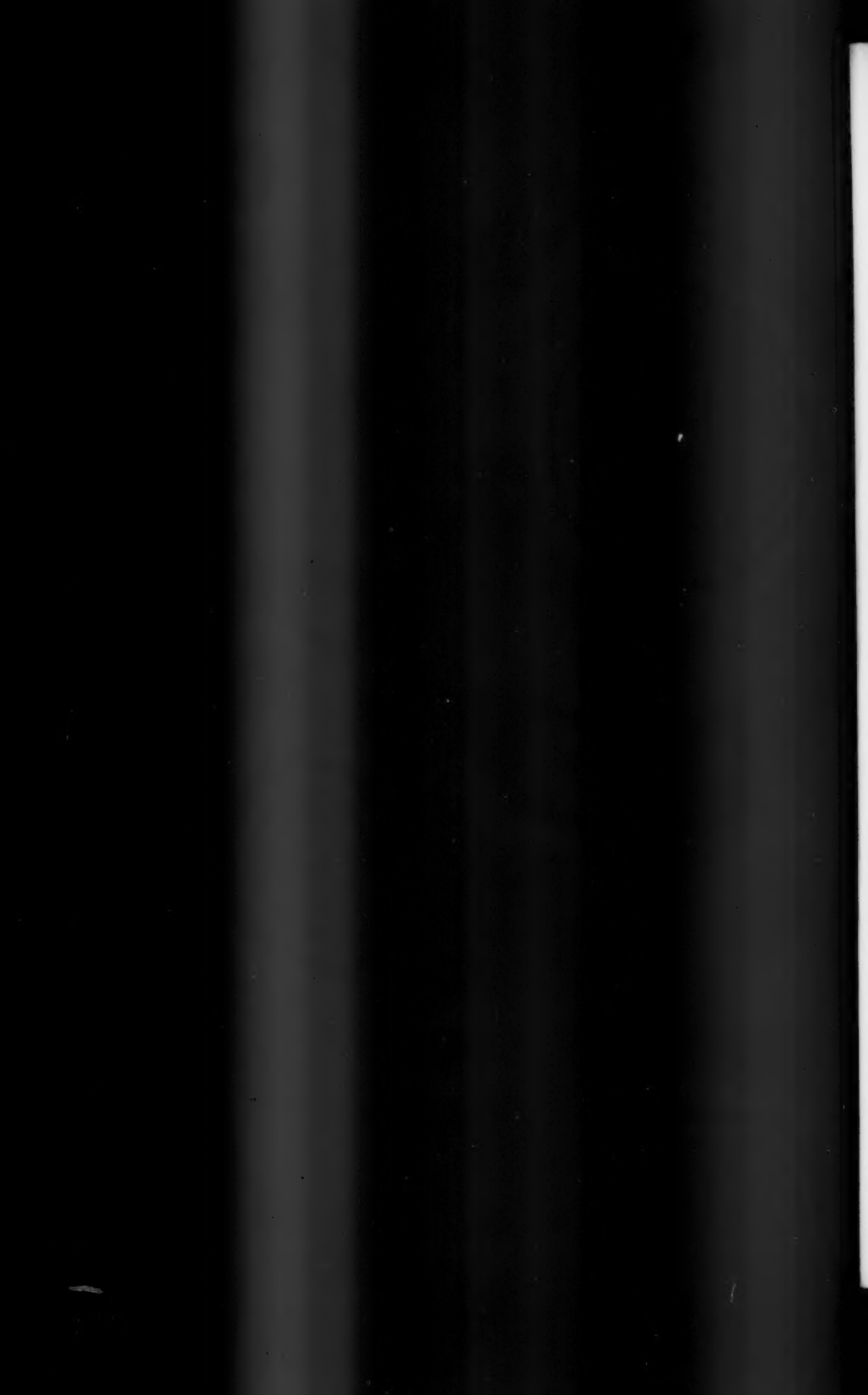


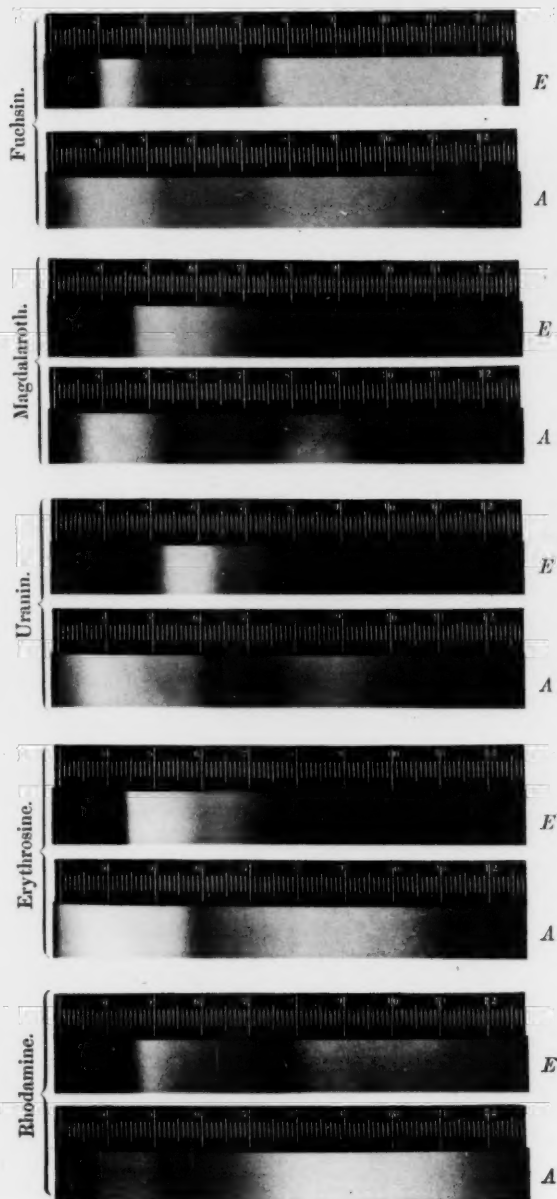
Fig. 9.





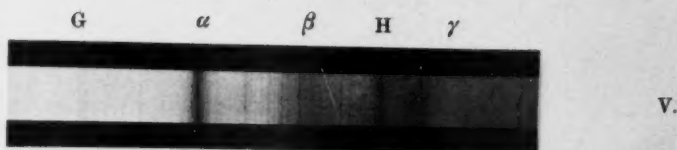
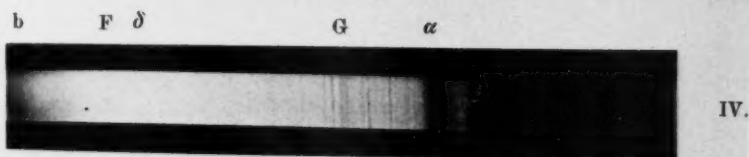
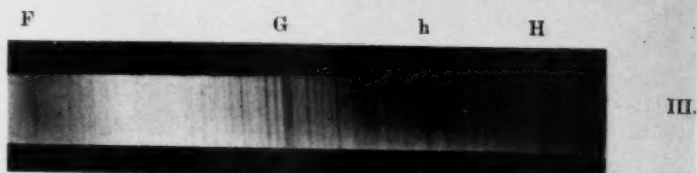






E = Empfindlichkeit der gefärbten Platte.
A = Absorption derselben Platte.

Acworth.



B. Walter.

100

1891.

N^o 4.

ANNALEN
DER
PHYSIK UND CHEMIE.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.

NEUE FOLGE

BAND XLII. HEFT 4.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT ACHTUNDZWEIßZIGSTEN BANDES
VIERTES HEFT.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT ZU BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERREN

H. VON HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

G. WIEDEMANN.



LEIPZIG, 1891.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIVS BARTH.

Geschlossen am 1. März 1891.

Inhalt.

	Seite
I. C. Dieterici. Calorimetrische Untersuchungen	513
II. P. Drude und W. Voigt. Bestimmung der Elasticitätscon- stanten einiger dichter Mineralien	537
III. W. König. Hydrodynamisch-akustische Untersuchungen	549
IV. J. Elster und H. Geitel. Notiz über eine neue Form der Apparate zur Demonstration der lichtelectrischen Entladung durch Tageslicht	584
V. P. Drude und W. Nernst. Einfluss der Temperatur und des Aggregatzustandes auf das Verhalten des Wismuths im Magnetfelde	568
VI. L. Arons und H. Rubens. Ueber die Fortpflanzungsge- schwindigkeit electrischer Wellen in isolirenden Flüssigkeiten	581
VII. W. Wien. Das Telephon als optischer Apparat zur Strom- messung	593
VIII. G. Stern. Ueber mikrophonische Tonstärkemessung	622
IX. J. Mooser. Ueber die durch Zerstäuben der Kathode er- haltenen Metallschichten	639
X. K. Olszewski. Ueber das Absorptionsspectrum und über die Farbe des flüssigen Sauerstoffs	663
XI. P. Drude. Ueber die Brechung des Lichtes durch Metall- prismen	666
XII. G. J. Michaëlis. Ueber die Moleculartheorie der Elasticität fester Körper	674
Berichtigung	680

Die geehrten Herren Mitarbeiter erlaubt sich die Redaction der Annalen ergebenst zu ersuchen:

- 1) Die Manuscripte **druckfertig** einzuliefern und in den Correcturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.
- 2) die **Zeichnungen** in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuscript selbst einzuzichnen), sowie, da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, recht genau die Stelle des Manuscriptes anzugeben, wo sie hingehören;
- 3) Citate am Rande oder unten auf den Seiten der Manuscripte (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen;
- 4) falls ausnahmsweise mehr als die 50 von der Verlagsbuchhandlung kostenfrei gelieferten **Sonderabdrücke** gewünscht werden, dies bei Rücksendung des ersten Correcturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite gefälligst bemerken, alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mittheilungen aber an die Verlagsbuchhandlung richten zu wollen.

Lichtelektrische Apparate

nach Elster u. Geitel (Wied. Ann. 41, Pag. 161 u. 166) fertigt

Louis Müller-Unkel, Glastechniker,
Braunschweig.

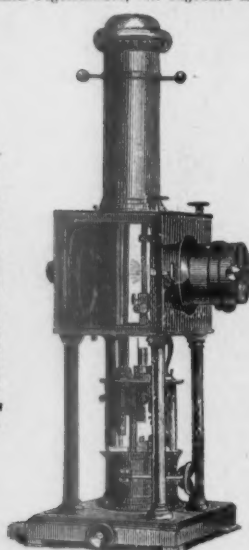
Gebrauchsanweisung und Preisverzeichniss franco und gratis.

Apparate

zur objectiven Darstellung

der Spectral- und Polarisations-Erscheinungen,
mikroskopischer Vergrößerungen photographi-
scher und gemalter Bilder von wissenschaft-
lichen Gegenständen, von Gegenden u. s. w.

Optisches Institut von



A. Krüss in Hamburg.

An Universitäten, höhern Lehranstalten und
für öffentliche Vorträge mit grossem Erfolg
vielfach im Gebrauch. Glasphotogramme.
Presecourants auf portofreie Anforderungen
gratis.

Optisches Institut
von A. Krüss in Hamburg.

Verlag von **Joh. Ambr. Barth**
in Leipzig.

Dziobek, Otto. Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen. gr. 8°. [VIII, 305 Seiten.] 1888. *M* 9.—

Zunächst für Mathematiker zur Einführung in die Mechanik des Himmels bestimmt, aber auch für Astronomen und für Physiker sehr beachtenswertes Buch. Jedem Abschnitt sind geschichtliche Uebersichten und Quellen-Nachweise für das eingehendere Studium beigelegt.

Stokes, George Gabriel. Das Licht, Zwölf Vorlesungen, gehalten in Aberdeen 1883—85, nebst zwei Vorlesungen über Absorption u. Fluorescenz des Lichtes. Autorisierte deutsche Uebersetzung von O. Dziobek. gr. 8°. [XII, 308 S. mit Bildnis d. Verf. in Stahlstich.] 1888. br. *M* 5.—, i. f. Halbfranz *M* 7.—

(Aus e. Besprechung in d. „Natur“). Die glänzendste Eigenschaft aber, welche Stokes in seinen Vorlesungen entfaltet, ist die, dass er, obwohl durch und durch Mathematiker, doch hier verschmählt, seine Zuhörer mit mathematischen Formeln zu überschütten. Was er zu sagen hat, drückt er in scharfen leicht verständlichen Worten aus und bemeistert so die schwierigsten Probleme mit einer Geschicklichkeit, die wir nur bei grossen Mathematikern wie EULER und BESSEL wiederfinden.

Aeltere Jahrgänge u. Bände der Annalen der Physik u. Chemie

(Gren-, Gilbert- und Poggendorff'sche Folge)

werden zu angemessenen Preisen gekauft

von der Verlagsbuchhandlung:

Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

7437

